+227

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

KÖNYVTÁR

Néhány nem közismert oszthatósági szabály
(Dr. Darvasi Gyula)

Egy meglepő geometriai analógia
(Fitos László)

Újabb eredmények hatszögtáblán
(Ambrus Gabriella)

A matematika feladatmegoldó pontverseny harmadik fordulójának feladatai

Feladatrovat tanároknak

IV. ÉVFOLYAM 1996 1

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 490 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

Néhány nem közismert oszthatósági szabály
Dr. Darvasi Gyula, Nyíregyháza

Egy meglepő geometriai analógia
Fitos László, Esztergom

Tolnai Gyuláné társszerzőkkel írt, Felfedező matematika című munkafüzet-sorozatának és a ráépülő matematikatanítási programnak elemzése
Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztálya

Újabb eredmények hatszögtáblán
Ambrus Gabriella, Budapest

Hírek

Feladatok 1996-tal kapcsolatban
A makói Kálvin Téri Ált. Isk. tanulóinak gyűjtése

A matematika feladatmegoldó pontverseny III. fordulójának feladatai

A matematika feladatmegoldó pontverseny I. fordulójának megoldása

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Dr. Darvasi Gyula

Néhány nem közismert oszthatósági szabály

Az általános és középiskolai oktatásban az egész számok halmazán értelmezett oszthatósággal kapcsolatosan közismert a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 8-cal, 9-cel, 10-zel, 11-gyel, 16-tal és 25-tel oszthatóság szabálya. Ha az osztót csak 2-től 25-ig választhatjuk, akkor az osztó egymáshoz relatív prím tényezőinek segítségével a tanulók által is megfogalmazható a 6-tal, 12-vel, 14-gyel, 15-tel, 18-cal, 20-szal, 21-gyel, 22-vel és 24-gyel való oszthatóság szabálya. Az eddigi felsorolásból azonban hiányzik a 7-tel, 13-mal, 17-tel, 19-cel és 23-mal való oszthatósági szabály. Ha ezzel kapcsolatosan kérdés vetődik fel, akkor arra majdnem mindig az a válasz, hogy az oszthatóság eldöntéséhez ezekkel a prímszámokkal el kell végezni az osztást, azaz nincs rájuk vonatkozó ismert oszthatósági szabály. Pedig ez a válasz nem helytálló, minthogy bármely prímszámra van oszthatósági szabály, csak az legfeljebb nem eléggé közismert. Ezt a tényt szem előtt tartva az alábbiakban bemutatunk néhány olyan oszthatósági szabályt, amelyek egyszerű számelméleti ismeretekre alapulnak, éppen ezért könnyen elsajátíthatók, s a tanulók oszthatósággal kapcsolatos ismeretkörét is tágíthatják.

Elsőként egy olyan oszthatósági szabályt írunk le, amely **tetszőleges osztó**ra érvényes, függetlenül attól, hogy az prím- vagy összetett szám. Ennek a szabálynak az alapgondolata igen egyszerű: a vizsgált számból vonjuk ki az osztót vagy annak valamely többszörösét mindaddig, amíg olyan számot nem kapunk, amelyről az oszthatóság már ránézésre eldönthető. Csakhogy az ismételt kivonások végzése egyáltalán nem véletlenszerű. Az első kivonás során az osztót vonjuk ki, ha a vizsgált szám és az osztó utolsó jegye azonos, egyébként az osztó olyan többszörösét, amelynek utolsó jegye azonos a vizsgált szám utolsó jegyével. Az adódó különbség legalább egy nullára végződik, amit törlünk, s a különbségből így megmaradt számból ismét kivonjuk az osztó valamely előbbi értelemben vett alkalmas többszörösét. Lássunk erre két példát: 9576 osztható-e 7-tel és 2054 osztható-e 13-mal?

$$\begin{array}{r} 9576 \\ -\ 56 = 8 \cdot 7 \\ \hline 9520 \\ -\ 42 = 6 \cdot 7 \\ \hline 910 \\ -\ 21 = 3 \cdot 7 \\ \hline 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2054 \\ -\ 104 = 8 \cdot 13 \\ \hline 1950 \\ -\ 65 = 5 \cdot 13 \\ \hline 130 \end{array}$$

A fenti eljárásból az is kiolvasható, hogy $9576 = (8 + 60 + 300 + 1000) \cdot 7 = 1368 \cdot 7$ és $2054 = (8 + 50 + 100) \cdot 13 = 158 \cdot 13$.

Vizsgáljuk meg ezután a **7-tel való oszthatóság**ot előbb háromjegyű, majd tetszőleges számra. Egy $z = \overline{a_2 a_1 a_0}$ háromjegyű számból $10^2 \equiv 2 \pmod 7$ alapján képezzük a $z_1 = \overline{a_1 a_0} + 2a_2$ számot, amely pontosan akkor osztható 7-tel, ha z is osztható 7-tel. Ennek alapján a következő szabályhoz jutunk. Egy háromjegyű szám osztható 7-tel, ha az utolsó két jegyéből álló számhoz a százasok helyén álló jegy kétszeresét adva 7-tel osztható számot kapunk. Amennyiben ismét háromjegyű szám adódna, akkor az eljárást megismételjük. Ha az ismételt alkalmazást el akarjuk

kerülni, akkor $10^2 \equiv -5 \pmod 7$ alapján z-ből képezzük a $z_1' = \overline{a_1a_0} - 5a_2$ számot. Ezáltal az eljárás egy lépésben mindig véget ér, jóllehet az előbb kimondott szabály kissé megváltozik. Egy háromjegyű szám osztható 7-tel, ha az utolsó két jegyéből álló számból a százasok helyén álló jegy ötszörösét levonva 7-tel osztható számot kapunk.

$z = 994$

$z_1 = 94 + 2 \cdot 9 = 112$

$z_1' = 94 - 5 \cdot 9 = 49$

$z_2 = 12 + 2 \cdot 1 = 14.$

Mindkét változat alkalmazható tetszőleges $z = \overline{a_n \dots a_1a_0}$ $(n \geq 3)$ egész számra is, ha azt $z = \overline{a_1a_0} + 10^2 \cdot \overline{a_n \dots a_3a_2}$ alakúnak tekintjük, bár az első változat talán mégis célszerűbbnek tartható, mivel ennek során csak pozitív számok szerepelnek és kisebb mértékben növekszik a részletszámításbeli számok abszolút értéke.

$z = 727\,916$

$z_1 = 16 + 2 \cdot 7279 = 14\,574$

$z_1' = 16 - 5 \cdot 7279 = -36\,379$

$z_2 = 74 + 2 \cdot 145 = 364$

$z_2' = 79 - 5 \cdot 363 = -1736$

$z_3 = 64 + 2 \cdot 3 = 70$

$z_3' = 36 - 5 \cdot 17 = -49.$

Ha viszont $z = \overline{a_n \dots a_1a_0}$ legalább ötjegyű egész szám, akkor az felírható $z = \overline{a_1a_0} + 10^2 \cdot \overline{a_3a_2} + 10^4 \cdot \overline{a_5a_4} + \dots$ alakban is. Ennek alapján a 7-tel való oszthatóság eldöntéséhez az utolsó jeggyel kezdve kettes csoportokra bontjuk a számot, a balról legelső kettes csoport (ami egy jegyből is állhat) kétszereséhez hozzáadjuk a következő kettes csoportot, majd az így kapott összeg kétszereséhez ismét hozzáadjuk a következő kettes csoportot. Ezt addig folytatjuk, amíg az utolsó kettes csoportot is fel nem használtuk. A legutoljára kapott összeg egy legfeljebb háromjegyű szám, amelyről a 7-tel való oszthatóság a már ismertetett módon eldönthető. Ez az eljárás módosítható úgy, hogy háromjegyű közbeeső összeg esetén a kétszerezés előtt vizsgáljuk meg a 7-tel való oszthatóságot.

$z = 121\,317$	$z = 727\,916$	$z = 727\,916$
24	144	144
+ 13	+ 79	+ 79
37 · 2	223 · 2	223
74	446	4
+ 17	+ 16	+ 23
91	462	27 · 2
	4 · 2	54
	8	+ 16
	+ 62	70
	70	

Az előbbi példákból is látható, hogy nagy számok esetén egyre többször kell megismételni ezt az eljárást, ezért felvetődik az igény valamilyen gyorsabb szabály megfogalmazására. Ebből a célból a $z = \overline{a_n \dots a_1a_0}$ $(n \geq 3)$ egész számot az utolsó jeggyel kezdett hármas csoportokra bontással $z = \overline{a_2a_1a_0} + 10^3 \cdot \overline{a_5a_4a_3} + 10^6 \cdot \overline{a_8a_7a_6} + \dots$ alakba írjuk át, majd ebből $10^3 \equiv -1 \pmod 7$, $10^6 \equiv +1 \pmod 7$, ... alapján képezzük a $z_1 = \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} - \dots$ számot, amelynek 7-tel való oszthatóságából az eredeti z egész szám 7-tel oszthatósága is adódik. Kimondható tehát a következő szabály: egy háromnál több jegyű egész szám osztható 7-tel, ha az utolsó jeggyel kezdett hármas csoportokra bontással adódó háromjegyű számokat váltakozó előjellel összeadva 7-tel osztható számot kapunk. Ezen előjelezés során az egyeseket tartalmazó első csoport mindig pluszjelet kap. Nagy számok esetén ezt az eljárást addig kell ismételni, míg háromjegyű szám nem adódik, azután arra alkalmazzuk a már megismert szabályok valamelyikét.

$$\left.\begin{aligned} z &= 3\,211\,552\,799 \\ z_1 &= 799 - 552 + 211 - 3 = 455 \\ z_2 &= 55 + 2 \cdot 4 = 63 \end{aligned}\right\} 7 \mid z$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 3\,999\,111\,999 \\ z_1 &= 999 - 111 + 999 - 3 = 1\,884 \\ z_2 &= 884 - 1 = 883 \\ z_3' &= 83 - 5 \cdot 8 = 43 \end{aligned}\right\} 7 \nmid z$$

A továbbiakban a **13-mal való oszthatóság**ra ismertetünk egy hasonló felépítésű szabályt, melynek megfogalmazását most már az olvasóra bízzuk. A háromjegyű $z = \overline{a_2a_1a_0}$ egész számból $10^2 \equiv -4 \pmod{13}$ alapján képezzük a $z_1 = \overline{a_1a_0} - 4a_2$ számot. Háromnál több jegyű $z = \overline{a_n \dots a_1a_0}$ szám esetén a z egész számot az utolsó jeggyel kezdett hármas csoportokra bontással a már ismert $z = \overline{a_2a_1a_0} + 10^3 \cdot \overline{a_5a_4a_3} + 10^6 \cdot \overline{a_8a_7a_6} + \dots$ alakba írjuk át, majd ebből $10^3 \equiv -1 \pmod{13}$, $10^6 \equiv +1 \pmod{13}$, ... alapján képezzük a $z_1 = \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} - \dots$ számot, amelynek 13-mal való oszthatóságából az eredeti z egész szám 13-mal oszthatósága is adódik.

$$\left.\begin{aligned} z &= 589\,225 \\ z_1 &= 225 - 589 = -364 \\ z_2 &= 64 - 4 \cdot 3 = 52 \end{aligned}\right\} 13 \mid z$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 6\,430\,258\,719 \\ z_1 &= 719 - 258 + 430 - 6 = 885 \\ z_2 &= 85 - 4 \cdot 8 = 53 \end{aligned}\right\} 13 \nmid z$$

A 17-tel, 19-cel és 23-mal való oszthatóságnak hasonló módon történő eldöntése háromnál többjegyű szám esetén az eddigiekhez képest váratlanul hosszú eljáráshoz vezet, ezért annak részletes leírására nem is térünk ki, csak röviden vázoljuk és egy-egy példán keresztül bemutatjuk.

Oszthatóság 17-tel:

$$\left.\begin{aligned} z &= \overline{a_2a_1a_0} \\ 10^2 &\equiv -2 \pmod{17} \\ z_1 &= \overline{a_1a_0} - 2a_2 \end{aligned}\right\} 17 \mid z \Leftrightarrow 17 \mid z_1$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 765 \\ z_1 &= 65 - 2 \cdot 7 = 51 \end{aligned}\right\} 17 \mid 765$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \overline{a_2a_1a_0} + 10^3 \cdot \overline{a_n \dots a_4a_3} \quad (n \geq 3) \\ 10^3 &\equiv -3 \pmod{17} \\ z_1 &= \overline{a_2a_1a_0} - 3 \cdot \overline{a_n \dots a_4a_3} \end{aligned}\right\} 17 \mid z \Leftrightarrow 17 \mid z_1$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 776\,679 \\ z_1 &= 679 - 3 \cdot 776 = -1649 \\ z_2 &= 649 - 3 \cdot 1 = 646 \\ z_3 &= 46 - 2 \cdot 6 = 34 \end{aligned}\right\} 17 \mid 776\,679$$

Oszthatóság 19 cel:

$$\left.\begin{aligned} z &= \overline{a_2a_1a_0} \\ 10^2 &\equiv 5 \pmod{19} \\ z_1 &= \overline{a_1a_0} + 5a_2 \end{aligned}\right\} 19 \mid z \Leftrightarrow 19 \mid z_1$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 855 \\ z_1 &= 55 + 5 \cdot 8 = 95 \end{aligned}\right\} 19 \mid 855$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \overline{a_2a_1a_0} + 10^3 \cdot \overline{a_n \dots a_4a_3} \quad (n \geq 3) \\ 10^3 &\equiv -7 \pmod{19} \\ z_1 &= \overline{a_2a_1a_0} - 7 \cdot \overline{a_n \dots a_4a_3} \end{aligned}\right\} 19 \mid z \Leftrightarrow 19 \mid z_1$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 8\,717\,048 \\ z_1 &= 48 - 7 \cdot 8717 = -60\,971 \\ z_2 &= 971 - 7 \cdot 60 = 551 \\ z_3 &= 51 + 5 \cdot 5 = 76 \end{aligned}\right\} 19 \mid 8\,717\,048$$

Oszthatóság 23-mal:

$$\left.\begin{aligned} z &= \overline{a_2a_1a_0} \\ 10^2 &\equiv 8 \pmod{23} \\ z_1 &= \overline{a_1a_0} + 8a_2 \end{aligned}\right\} \; 23 \mid z \Leftrightarrow 23 \mid z_1$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 943 \\ z_1 &= 43 + 8 \cdot 9 = 115 \\ z_2 &= 15 + 8 \cdot 1 = 23 \end{aligned}\right\} \; 23 \mid 943$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \overline{a_2a_1a_0} + 10^3 \cdot \overline{a_n \ldots a_4a_3} \\ & \qquad (n \geq 3) \\ 10^3 &\equiv 11 \pmod{23} \\ z_1 &= \overline{a_2a_1a_0} + 11 \cdot \overline{a_n \ldots a_4a_3} \end{aligned}\right\} \; 23 \mid z \Leftrightarrow 23 \mid z_1$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 3\,869\,934 \\ z_1 &= 934 + 11 \cdot 3869 = 43\,493 \\ z_2 &= 493 + 11 \cdot 43 = 966 \\ z_3 &= 66 + 8 \cdot 9 = 138 \\ z_4 &= 38 + 8 \cdot 1 = 46 \end{aligned}\right\} \; 23 \mid 3\,869\,934$$

Ha a 25-nél nagyobb prímszámokra az előbbiekhez hasonló jellegű oszthatósági szabályokat keresünk, akkor még előfordulhatnak olyan prímszámok, amelyekre az eljárás viszonylag hamar véget ér. Ez történik például a **37 és a 101 esetén**, mivel ekkor $10 \equiv -27 \pmod{37}$, $10^2 \equiv -11 \pmod{37}$, $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$ és $10 \equiv -91 \pmod{101}$, $10^2 \equiv -1 \pmod{101}$. Így az $\overline{a_n \ldots a_1a_0}$ $(n \geq 3)$ egész szám helyett az $\overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} + \ldots$ illetve az $\overline{a_1a_0} - \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} - \ldots$ összeg vizsgálható. Ennek alapján egy egész szám pontosan akkor osztható

- 37-tel, ha a jobbról hármas csoportokba osztással kapott számok összege osztható 37-tel,
- 101-gyel, ha a jobbról kettes csoportokba osztással kapott számok váltakozó előjellel vett összege osztható 101-gyel.

$$\left.\begin{aligned} z &= 1\,742\,165\,239 \\ z_1 &= 239 + 165 + 742 + 1 = 1147 \\ z_2 &= 147 + 1 = 148 \end{aligned}\right\} \; 37 \mid 1\,742\,165\,239$$

$$\left.\begin{aligned} z &= 17\,02\,06\,52\,31 \\ z_1 &= 31 - 52 + 6 - 2 + 17 = 0 \end{aligned}\right\} \; 101 \mid 1\,702\,065\,231$$

További oszthatósági szabályok egyedi keresése helyett két változatban ismertetünk egy olyan oszthatósági tesztet, amely **2-től és 5-től különböző bármely *p* prímszám esetén** alkalmazható. Az első változathoz $z = \overline{a_n \ldots a_1a_0}$ és $z_1 = \overline{a_n \ldots a_2a_1} - ka_0$ jelöléssel tekintsük a $z = 10z_1 + (10k + 1)a_0$ azonosságot, ahol k olyan egész számnak választandó, hogy $p \mid 10k + 1$, azaz $10k + 1 = ps$ valamely alkalmas s egész számra teljesüljön. Ekkor $p \in \{2, 5\}$ esetén $p \mid z \Leftrightarrow p \mid z_1$. Így elegendő a z_1 egész szám p-vel való oszthatóságát vizsgálni. Ehhez ismernünk kell a k egész számot, vagyis a $10k + 1 = ps$ feltétel miatt az s alkalmas értékét. Viszont $p \notin \{2, 5\}$ esetén p utolsó jegye 1, 3, 7 vagy 9 lehet, s ezért s utolsó jegye p utolsó jegyétől függően rendre 1, 7, 3 vagy 9. Ily módon p megadása után k értéke egyszerű számítással adódik, aminek az eredményét $s \in \{1, 3, 7, 9\}$ választással p néhány lehetséges értékére az alábbi táblázat tartalmazza.

p	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	...
k	2	2	1	9	5	17	16	26	3	11	4	...

$p = 7 \Rightarrow s = 3$ és $k = 2$.

$$\left.\begin{aligned} z &= 5236 \\ z_1 &= 523 - 2 \cdot 6 = 511 \\ z_2 &= 51 - 2 \cdot 1 = 49 \end{aligned}\right\} 7 \mid 5236$$

$p = 13 \Rightarrow s = 7$ és $k = 9$.

$$\left.\begin{aligned} z &= 589\,225 \\ z_1 &= 58\,922 - 9 \cdot 5 = 58\,877 \\ z_2 &= 5887 - 9 \cdot 7 = 5824 \\ z_3 &= 582 - 9 \cdot 4 = 546 \\ z_4 &= 54 - 9 \cdot 6 = 0 \end{aligned}\right\} 13 \mid 589\,225$$

Nagy számok esetén az eljárás azáltal gyorsítható, ha s-re nagyobb alkalmas értéket választunk. Ezáltal k értéke nő és így a $z_1, z_2, \ldots$ sorozat tagjai hamarabb csökkennek, jóllehet s és k nagyobb értékeinek megkeresése több időt vesz igénybe. s és k értékeinek megváltoztatása egy eljáráson belül is lehetséges.

$p = 13 \Rightarrow$

s	7	17	27	...	1357	...	3597	...
k	9	22	35	...	1764	...	4676	...
					z_2		z_1	

$$\left.\begin{aligned} z &= 589\,225 \\ z_1 &= 58\,922 - 4676 \cdot 5 = 35\,542 \\ z_2 &= 3554 - 1764 \cdot 2 = 26 \end{aligned}\right\} 13 \mid 589\,225$$

A második változatban $z = \overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ és $z_1 = \overline{a_n \ldots a_2 a_1} + ka_0$ jelöléssel a $z = 10z_1 - (10k - 1)a_0$ azonosságot használjuk, ahol k olyan egész számnak választandó, hogy $p \mid (10k - 1)$, azaz $10k - 1 = ps$ valamely alkalmas s egész számra teljesüljön. Ekkor $p \notin \{2, 5\}$ esetén $p \mid z \Leftrightarrow p \mid z_1$, így itt is elegendő a z_1 egész szám p-vel való oszthatóságát vizsgálni. Ehhez az első változathoz hasonlóan eljárva most az alábbi táblázat készíthető.

p	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	...
k	1	5	10	4	12	2	7	3	28	26	37	...

$p = 7 \Rightarrow s = 7$ és $k = 5$

$$\left.\begin{aligned} z &= 5236 \\ z_1 &= 523 + 5 \cdot 6 = 553 \\ z_2 &= 55 + 5 \cdot 3 = 70 \end{aligned}\right\} 7 \mid 5236$$

$p = 13 \Rightarrow s = 3$ és $k = 4$

$$\left.\begin{aligned} z &= 589\,225 \\ z_1 &= 58\,922 + 4 \cdot 5 = 58\,942 \\ z_2 &= 5894 + 4 \cdot 2 = 5902 \\ z_3 &= 590 + 4 \cdot 2 = 598 \\ z_4 &= 59 + 4 \cdot 8 = 91 \end{aligned}\right\} 13 \mid 589\,225$$

Végezetül bemutatunk még egy oszthatósági szabályt, amely szintén bármely $p \notin \{2, 5\}$ prímszámra alkalmazható. Ehhez a z egész számot $z = 10A + B$, a p prímszámot pedig $p = 10C + D$ alakba írjuk át, ahol $p > 10$ esetén p és D relatív prímek. Ekkor $10 < p \mid \Delta = AD - BC$ esetén $p \mid z$ is teljesül. Ugyanis a $10A + B = z$ és $10C + D = p$ egyenletekből $10(AD - BC) = Dz - Bp$ kapható, ahonnan $p \mid AD - BC$ esetén $p \mid Dz - Bp$, majd ebből $p > 10$ miatt $p \mid z$ adódik.

$p = 13 \Rightarrow \Delta = 3A - B$

$z = 589\,225$

$\Delta_1 = 3 \cdot 58\,922 - 5 = 176\,761$
$\Delta_2 = 3 \cdot 17\,676 - 1 = 53\,027$
$\Delta_3 = 3 \cdot 5302 - 7 = 15\,899$
$\Delta_4 = 3 \cdot 1589 - 9 = 4758$
$\Delta_5 = 3 \cdot 475 - 8 = 1417$
$\Delta_6 = 3 \cdot 141 - 7 = 416$
$\Delta_7 = 3 \cdot 41 - 6 = 117$
$\Delta_8 = 3 \cdot 11 - 7 = 26$

$13 \mid 589\,225$

Az eljárás gyorsítása céljából a $p > 10$ prímszám helyett vegyük valamely 1-re végződő többszörösét: $10C + D \to 10k + 1 = ps$, ahol s utolsó jegyét D-től, majd s-et a gyorsítás kívánt mértékétől függően lerögzítve, k értéke is meghatározható. Ekkor a $10(A - Bk) = z - Bps$ összefüggésből látható, hogy a $p > 10$ feltétel már nem szükséges, viszont ps utolsó jegye miatt $p \in \{2, 5\}$ nem lehetséges. A gyorsítás révén tehát visszajutottunk egy előbb megismert általános oszthatósági szabályhoz.

Irodalom

[1] Benjamin Bold: A general test for divisibility by any prime (except 2 and 5). Mathematics Teacher. 1965. April, 311-312.

[2] Fried Ervin: Oszthatóság és számrendszerek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[3] Silvino T. Lastimoso: Divisibility theorems. Mathematics Teaching. No. 91. 1980. 29.

[4] Andrew Linden: Divisibility by Mathematics Teaching. No. 68. 1974. 43.

[5] Hisham El-Naggar: Divisibility. Mathematics Teaching. No. 54. 1971. 20- 21.

[6] C.E. Nedza: Divisibility by primes. Mathematics Teaching. No. 82. 1978. 53.

[7] Niven – Zuckermann: Bevezetés a számelméletbe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[8] Karlheinz Rüdliger: Die Teilbarkeit durch die Zahlen 7, 13, 17 und 19. Praxis der Mathematik. 30. 1988. Nr. 5., 257-261.

Fitos László

Egy meglepő geometriai analógia

Egy síkgeometriai és egy térgeometriai tételről lesz szó, amelyek között analógia áll fenn. Az egyik a parabolába írt háromszög területére, a másik a paraboloidba írt tetraéder térfogatára vonatkozik.

I. *A parabolára vonatkozó tétel.* Ha az $y = ax^2$ ($a > 0$ valós szám) egyenletű parabolába beírt két háromszögre teljesül az a feltétel, hogy az egyik háromszög oldalainak az x tengelyre eső merőleges vetületei rendre megegyeznek a másik háromszög oldalainak a vetületeivel, akkor a két háromszög területe egyenlő.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy bármely beírt háromszög területe csak a csúcsok abszcisszakülönbségétől függ. Ha egy

beírt ABC háromszög csúcsainak az abszciszszái x_1, x_2, x_3, akkor a területe:

$$t = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & ax_1^2 & 1 \\ x_2 & ax_2^2 & 1 \\ x_3 & ax_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & 1 \\ x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & 0 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a}{2}(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a}{2}(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Látjuk, hogy a kapott területképletben csak a csúcsok abszcisszakülönbségei szerepelnek. Ez azt jelenti, hogy bármely beírt háromszög területe csak a csúcsok abszcissza-különbségeitől, vagyis a háromszög oldalainak az x tengelyen levő merőleges vetületeitől függ. Ebből pedig már következik a tétel állítása.

Megjegyzések:

1. A bebizonyított tétel minden parabolára érvényes, hiszen az a együttható minden pozitív valós értéket fölvehet.

2. A tétel megfordítása nem igaz.

3. Mivel a beírt háromszög területének a képletében az abszcisszakülönbségek szorzata szerepel, ezért a beírt háromszög területe nem függ az oldalak vetületeinek sorrendjétől.

4. A tétel a parabolába beírt két n oldalú ($n > 3$ természetes szám) konvex sokszögre is érvényes.

5. Jelöljük a parabolába beírt ABC háromszög csúcsainak az x tengelyen levő merőleges vetületeit A_0, B_0, C_0-lal! Nyilván minden beírt háromszöghöz tartozik egy vetületi ponthármas és fordítva. Ennek felhasználásával a tételt a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Az x tengelyen tetszőlegesen fölvett A_0, B_0, C_0 ponthármashoz tartozó beírt háromszög területe nem változik meg, ha a ponthármast az x tengely pozitív, vagy negatív irányában tetszőleges hosszúságú vektorral eltoljuk.

II. Ezután áttérünk az analóg térbeli (3-dimenziós) tételre. Tudjuk, hogy a parabolának a paraboloid, a háromszögnek a tetraéder a térbeli megfelelője, a háromszög oldalainak pedig a tetraéder lapjai felelnek meg. Be fogjuk bizonyítani, hogy e térbeli analóg tétel is igaz, sőt nemcsak elliptikus, hanem hiperbolikus paraboloidra is.

A térbeli analóg tétel. Ha a $z = ax^2 + by^2$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$ tetszőleges valós számok) egyenletű paraboloidba beírt két tetraéderre teljesül az a két feltétel, hogy az egyik tetraéder lapjainak az xy síkon levő merőleges vetületei rendre egybevágóak a másik tetraéder lapjainak vetületeivel és az egybevágó vetületek hasonló helyzetűek is, akkor a két tetraéder térfogata egyenlő.

Bizonyítás. Az állítást minden paraboloidra egyszerre bizonyíthatjuk be, ha a $z = ax^2 + by^2$ paraboloid-egyenletet használjuk fel, hiszen ha az a és b együttható azonos előjelű, akkor elliptikus paraboloidról, ha pedig különböző előjelű, akkor hiperbolikus paraboloidról van szó.

Nem nehéz megállapítani, hogy a tételben szereplő két feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha az egyik beírt tetraéder csúcsainak abszcissza- és ordinátakülönbségei megegyeznek a másik beírt tetraéder csúcsainak abszcissza- és ordinátakülönbségeivel. Ezért elég azt igazolni, hogy a paraboloidba beírt bármely tetraéder térfogata csak a csúcsok abszcissza- és ordinátakülönbségeitől függ. Ez az igazolás a következő.

Ha a $z = ax^2 + by^2$ egyenletű paraboloidba beírt tetraéder csúcsainak x-koordinátáit x_i-vel, y-koordinátáit y_i-vel $(i = 1, 2, 3, 4)$ jelöljük, akkor a tetraéder térfogatának 6-szorosa:

$$6V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & ax_1^2 + by_1^2 & 1 \\ x_2 & y_2 & ax_2^2 + by_2^2 & 1 \\ x_3 & y_3 & ax_3^2 + by_3^2 & 1 \\ x_4 & y_4 & ax_4^2 + by_4^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & ax_1^2 + by_1^2 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & a(x_2^2 - x_1^2) + b(y_2^2 - y_1^2) & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & a(x_3^2 - x_1^2) + b(y_3^2 - y_1^2) & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & a(x_4^2 - x_1^2) + b(y_4^2 - y_1^2) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[a(x_2^2 - x_1^2) + b(y_2^2 - y_1^2)\right] \cdot \left[(x_4 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_4 - y_1)\right] +$$

$$+ \left[a(x_3^2 - x_1^2) + b(y_3^2 - y_1^2)\right] \cdot \left[(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)\right] +$$

$$+ \left[a(x_4^2 - x_1^2) + b(y_4^2 - y_1^2)\right] \cdot \left[(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)\right] =$$

$$= a(x_2^2 - x_1^2)(x_4 - x_1)(y_3 - y_1) - a(x_4^2 - x_1^2)(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) +$$

$$+ a(x_3^2 - x_1^2)(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - a(x_2^2 - x_1^2)(x_3 - x_1)(y_4 - y_1) +$$

$$+ a(x_4^2 - x_1^2)(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - a(x_3^2 - x_1^2)(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) +$$

$$+ b(y_2^2 - y_1^2)(x_4 - x_1)(y_3 - y_1) - b(y_3^2 - y_1^2)(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) +$$

$$+ b(y_3^2 - y_1^2)(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - b(y_4^2 - y_1^2)(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) +$$

$$+ b(y_4^2 - y_1^2)(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - b(y_2^2 - y_1^2)(x_3 - x_1)(y_4 - y_1) =$$

$$= a(x_2 - x_1)(x_4 - x_1)(y_3 - y_1)(x_2 - x_4) + a(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(y_4 - y_1)(x_3 - x_2) +$$

$$+ a(x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(y_2 - y_1)(x_4 - x_3) + b(y_2 - y_1)(x_4 - x_1)(y_3 - y_1)(y_2 - y_3) +$$

$$+ b(y_3 - y_1)(x_2 - x_1)(y_4 - y_1)(y_3 - y_4) + b(y_4 - y_1)(x_3 - x_1)(y_2 - y_1)(y_4 - y_2).$$

Minthogy a beírt tetraéder térfogatát ki tudtuk fejezni a csúcsok abszcissza- és ordinátakülönbségeivel, ezért az előbbiek alapján a tétel állítása igaz.

Megjegyzések:

1. A tétel minden paraboloidra érvényes.

2. Könnyen belátható, hogy a tétel megfordítása nem igaz.

3. A paraboloidba beírt tetszőleges tetraéder és ennek az xy síkon levő merőleges vetülete kölcsönösen egymáshoz rendelhetők, egymáshoz tartozóknak mondhatók. Azt is vegyük figyelembe, hogy a vetületi négyszög csúcsainak abszcissza- és ordinátakülönbségei megegyeznek a hozzá tartozó beírt tetraéder csúcsainak abszcissza- és ordinátakülönbségeivel. Ezért a tétel a következőképpen is megfogalmazható. A $z = ax^2 + by^2$ egyenletű paraboloidba írjunk tetszőleges $ABCD$ tetraédert és jelöljük annak az xy síkon levő merőleges vetületét $A_0B_0C_0D_0$-lal! Ha ezt a vetületi négyszöget az xy síkon tetszőleges nagyságú és irányú vektorral eltoljuk, akkor az így kapott négyszöghöz tartozó tetraéder térfogata egyenlő az $ABCD$ tetraéder térfogatával.

Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztálya

Tolnai Gyuláné társszerzőkkel írt, Felfedező matematika című munkafüzet-sorozatának és a ráépülő matematikatanítási programnak az elemzése

1. Tolnai Gyuláné kidolgozott egy **oktatási rendszert**, amit heurisztikus programozású alternatívának nevez. Előbb az anyanyelvi tárgyakat tanította a program szerint, aztán a környezetismeretet, s végül most a matematikatanításra is kiterjesztette eljárását. Ez utóbbihoz kiadta és forgalmazza a Felfedező matematika c. tankönyvsorozatot.

A Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztálya nem kíván állást foglalni a különféle más tárgyak tanításában jelentkező elképzelésekről. Feladatának tartja azonban, hogy határozott véleményt nyilvánítson arról a programról és a hozzá tartozó tankönyvsorozatról, amelynek címe „Felfedező matematika".

A programnak mind a matematikai tartalma, mind a módszertani eljárásai, hatásmechanizmusa, mind pedig a ténylegesen vállalt és szolgált célok idegenek a matematikától, s a matematikatanítás NAT-ban is megfogalmazott felfogásától. Alkalmazott módszere semmibe veszi mindazokat a hatásokat és eredményeket, amelyeket Pestalozzi óta az általános didaktika és szakdidaktika elért. Ezért a BJMT Oktatási Szakosztálya elhatárolja magát a programtól.

2. Tartalmában, címszavaiban a program hasonlónak tűnik más, azonos korosztálynak szóló matematikakönyvekhez, de több matematikai területet csak felszínesen, esetlegesen érint. (Például halmazjelölések szerepelnek már az elsős könyvekben is, halmazok metszetét ábrázolja minden előkészítés nélkül, függvénytáblázatok, nyitott mondatok jelennek meg a témák szerepének megértése nélkül, a geometriának néhány megnevezését vezeti be a mögötte húzódó tartalom türelmes kimunkálása nélkül, megadja a kerület- és területszámítás követendő módját a gyakorlati mérések szorgalmazása nélkül stb.)

Az a téma, amit igazán felölel a tankönyv, az a számtan. Igen sok feladat vonatkozik a számokra: számok alkotására, számjegyeik alaki-, helyi- és valódi értékeire, helyükre a számegyenesen, szomszédaikra, kerekített értékeikre. Foglalkozik a műveletekkel: fejszámolással, írásbeli műveletekkel és szöveges feladatokkal.

Emellett Mérések címszó alatt leírja a tankönyvsorozat a szabványos mértékegységeket és viszonyukat, és ezek körében foglalkozik át- és beváltásokkal.

3. Legfőképpen a **feldolgozás módja** tekintetében van lényeges kifogásolnivalónk a program ellen:

Nem vállalja a program **a matematikai fogalmak, ismeretek kimunkálásának tapasztalatszerzéssel kezdődő hosszú folyamatát**, hanem helyette kijelentéseket tesz, vagy még több esetben ismertnek kezeli a szavak tartalmát.

Nem vállalja a program **a megértésen alapuló tanulást**, hanem csak sok mozgással, mutogatással, zenével összekapcsolt mechanikus memorizálással kívánja elsajátíttatni a számolási eseteket (pl. a szorzótáblákat, a mértékegységek közti váltószámokat).

Nem építi azokat **a képességeket, készségeket**, amelyek az önálló ismeretszerzés elengedhetetlen feltételét képezik – megfigyelés, tapasztalatok szerzése, elemzés, absztrahálás, általánosítás, gondolkodás – és amely a NAT szerint az iskolai matematikatanítás feladata.

4. A feldolgozás lényeges jellemzője egy **jelrendszer kiépítése és használata**, amelyet a gyerekek és a megismerésre váró valóság közé beiktat. Ez az anyanyelv tanításához kifejlesztett „programfalra" épülő, merőben művi világot alkot, s a benne való tájékozódás fontosságban felülmúlja a valósággal és a matematikával való ismerkedést, foglalkozást, továbbá összekeveri a jelölést és a jelentést.

A jelrendszer a négy osztályban három lényeges szakaszt jelent. Elsőben a számokat egy-egy hívóképhez kapcsolja a program: a kép jelenti egyrészt az ábrázolt dolgot, aztán a nevét, a hangalakját, a leírt szót, másrészt hívóképe a szó első hangjának, betűjének, harmadrészt hívóképe annak a számnak, ahány betűből áll ez a szó. (Például az alma szó, az almát ábrázoló kép a 4-et jelenti, mert 4 betűből áll.)

Másodikban már számjegyet rendel egy-egy hívóképhez, így a kétjegyű számokat képpár, szópár jelzi (pl. az alma, almapüré szó, és az ezeket ábrázoló képpár a 48-at jelenti).

Harmadikban és negyedikben egy szó betűihez rendel a program számjegyeket: azokat, amelyeket az elsős program a hívóképpel együtt a betűhöz kapcsolt. (Tehát most már az alma szó egy négyjegyű szám jele: a 4564-et jelenti, mert az „a" betű az „alma" szó alapján 4-et ér, az „1" a levél szó közvetítésével 5-öt ér, az „m" a „mérleg" szó alapján a 6 megfelelője.)

Hihetnénk ezt egy néhányszor szereplő rejtvényfejtő játéknak, ha valóban csak 4-5 alkalommal játszhatnának vele a gyerekek. A veszélyét az jelenti, hogy ez kap főszerepet a programban.

Például a 3. osztályban 100, a negyedikben 99 feladatot fogalmaz meg a program (a kb. 120 oldalon) ezzel az áttétellel, miközben pl. ugyanebben a két osztályban összesen 52, illetve 46 szöveges feladat szerepel. Ugyanígy hangzik el a továbbképzéseken és a videofelvételeken is.

Ezzel a rejtvénnyel egyrészt a matematika egyébként is nehéz nyelve szinte elviselhetetlenül bonyolulttá válik, másrészt pedig az esetenként 6-14 rejtvény megfejtése elvonja a figyelmet a matematikai tartalmakról.

Például néhány szorzás elvégzésére szóló egyszerű utasítás helyett ezt olvashatjuk: „A lepkék neveiben aláhúzott magánhangzók felhasználásával képezz négyjegyű számokat, és szorozd meg a) a kontinensek neveinek számával, b) a tízesek helyén lévő szám valódi értékével, c) az a) és b) feladat szorzóinak összegével!" Az utasítás a következő szavakhoz

kapcsolódik: csíkospohók, AFRIKA, pihésszövő, AMERIKA, púposszövő, AUSZTRÁLIA, rókalepke, ÁZSIA. (L. Felfedező matematika 4. osztály 68. old.!)

Vagy pl. a 23. oldalon így fogalmazza meg a gyerekek tennivalóit: „Helyettesítsd be a megadott mértékegységekkel a szavak magán- és mássalhangzóit! Számold ki együttes hosszúságukat vagy űrtartalmukat, majd a kapott mennyiségeket írd be az első körbe! A második körbe írd be az „igaz" vagy „hamis" állítást annak alapján, hogy melyik közelíti meg a valóságot!" Hozzá a 8 képpár közül az elsőn a fenyő rajza és mellette a fenyő szó látható, megkülönböztetve aláhúzott magán- és mássalhangzókkal, alatta a „Magánh.: 15 dm, Mássalh.: 4 m".

Máshol képrejtvények sokaságát kell megfejteniük a gyerekeknek, mielőtt néhány összeadást, kivonást elvégezhetnek.

A program tehát ezzel az elbonyolítással cseréli föl a matematika lényegét. Látszólag a valósághoz kapcsolja a matematikai feladatokat, de a kapcsolatok nem érintik a matematikai lényeget, ezáltal a program hamis képet fest a matematikáról, erről a nagyon is a valóságból táplálkozó és a megismerés fontos eszközeként használt tudományról. Eközben súlyosan igénybe veszi és megzavarja a gyerekek figyelmét, gondolatait, aminek következtében a valóban fontos tapasztalatok, összefüggések kimaradnak a gondolkodásukból.

5. Az alkalmazott **módszer** lényege, hogy **nem építi az ismereteket**, hanem nagyrészt tudottként kezeli, s csak mechanikus gyakorlásukról gondoskodik. Néhány esetben a közlést illetve egy minta megmutatását választja tanítási módszerként, amit a gyerekeknek csak követniük kell, nem épít a megértésre, így a megértés képességét sem fejleszti.

A módszertani szabadság súlyos félreértelmezését jelentené, ha nem a gyerekek személyiség- és képesség-fejlesztése iránti felelősségvállalás, a szakma ismerete és tisztelete lenne az alapja és a mércéje annak, hogy milyen módszer szerint tanít a tanító.

A program szerzője nem ismeri a matematikát, és nem tartja tiszteletben a gyermek megismerésre és fejlődésre való jogát.

6. Szakmai tévedések is vannak az anyagokban. (Pl. néhol hibásan használja a tankönyvsorozat az alaki érték, valódi érték elnevezéseket, a négyzetet nem tekinti téglalapnak, az 1 és a –1 különbségére mondja az összege helyett, hogy az 0, helyiértéket próbál belelátni a római számírás számjeleibe stb.) **A szakmai hibáknál is veszélyesebbnek látjuk azonban a program egészének mesterkéltségét, a gyermek természetes tanulásmódjától idegen eljárásait, és a torz képet, amit a matematikáról kialakít a gyerekekben.**

(Tolnai Gyuláné válaszát a fenti cikkel kapcsolatban, következő (márciusi) számunkban közöljük.)

(szerk.)

Ambrus Gabriella

Újabb eredmények hatszögtáblán

A hatszögtáblával kapcsolatos lefedések néhány érdekességéről már korábban is írtam. [1], [2]
Ezek a vizsgálatok kiderítették, hogy:

1. Nincs olyan n-es hatszögtábla, amely lefedhető lenne $1 \times m$-es léccel ($n, m > 1$). [1]

2. Ha egy n-es hatszögtáblából 1 mezőt elhagyok, az $n = 3q + 2$ típusú tábla kivételével bármely „lyukas" tábla lefedhető – többféleképpen is – 1×3-as léccel. [2]

3. Ha egy n-es hatszögtáblából a középső mezőt hagyom el, úgy a 3 mezőt tartalmazó fedőlapok (3 lehetséges típus) bármelyikével, az $n = 3q + 2$ típusú tábla kivételével minden „középen lyukas" tábla lefedhető. [2]

Ezek után több kérdés is felvethető, például:

1. Melyik mező hagyható el egy n-es hatszögtáblából úgy, hogy lefedhető legyen $1 \times m$-es léccel? (Természetesen $m > 3$ esetén vizsgálva.)

2. Mely hatszögtáblák fedhetők le különböző hosszúságú, de legalább 2 hatszögmezőt tartalmazó lécek felhasználásával?

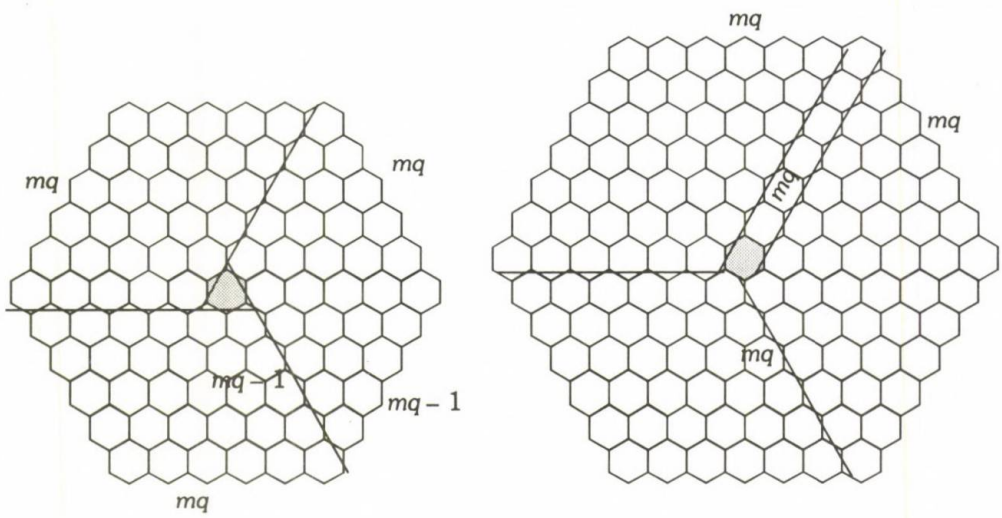
3. Lefedhető-e valamely hatszögtábla adott számú mezőből készíthető összes fedőlaptípus felhasználásával, minden fedőlapból egyet véve?

A felvetett kérdések közül nézzük mindjárt az elsőt!

1. Először a tábla középső mezejét vettem el, és vizsgáltam, hogy mely táblák lesznek így lefedhetők, $m > 3$ esetben, $1 \times m$-es léccel.

Az ilyen „lyukas" n-es táblán a mezők száma $S_n = 3n(n - 1)$, hiszen az n-es hatszögtábla mezőinek száma $S_n = 3n(n - 1) + 1$. [1]

Néhány speciális eset vizsgálata után sejthető volt, hogy az említett módon „kilyukasztott" táblák közül pontosan az $n = mq$ és $n = mq + 1$ esetekben lehetséges a lefedés.

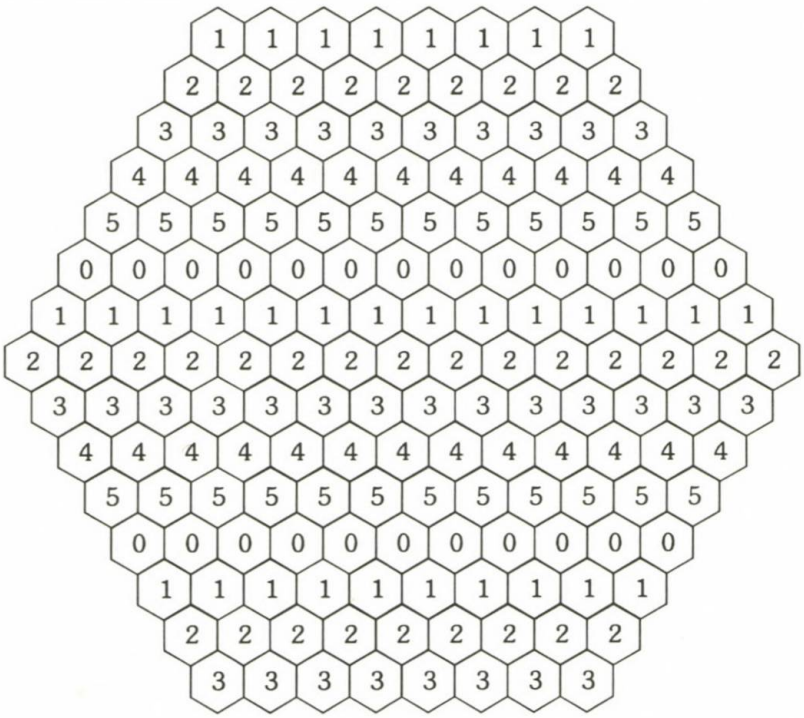


1. ábra

Először azt látjuk be, hogy az $n = mq$ és $n = mq + 1$ típusú n-es táblán mindig lehetséges a mondott lefedés. Az 1. ábra szerinti paralelogrammákra osztás ezt nyilvánvalóan biztosítja. (1. ábra $m = 6$, $q = 1$)

A továbbiakban belátjuk, hogy más n esetében viszont valóban nem lehetséges ez a lefedés.

A bizonyításhoz számozzuk az n-es hatszögtábla egy-egy sorának mezőit a sor mod m vett sorszámával. (2. ábra, $m = 6$)



2. ábra

Legyen $n = mq + k$, $1 < k < m$.

Mivel ilyen számozás mellett egy $1 \times m$-es léc vagy m darab azonos, vagy m darab különböző számozású mezőt fed le, belátható, hogy ha valamely tábla e lécekkel lefedhető, az azonos számozású mezők számának m-es maradéka azonos. [1] Ez tehát szükséges feltétel tetszőleges – esetleg lyukas – hatszögtáblák lefedéséhez. A korábbi vizsgálatok miatt feltehető, hogy $m > 3$.

Legyen $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l$ alakú, ahol p_i tetszőleges, nem feltétlenül különböző prímszámokat jelöl. ($1 \le i \le l$)

a) Mivel $m \mid S_{n_1}$, így minden $p_i > 3$-ra igaz, hogy $p_i \mid n$ vagy $p_i \mid n - 1$. A feltételek alapján tehát a középső sorban $k > 2$ fog állni minden olyan esetben, amikor az m prímtényezői között van $p_i > 3$, vagy a $p_i = 3$ tényező 1-nél magasabb hatványon szerepel. Ha $m = 3 \cdot 2^s$ $s > 1$, akkor mivel $2 \mid n$ vagy $2 \mid n - 1$ teljesül és $(n, n - 1) = 1$, így $4 \mid n$ vagy $4 \mid n - 1$ is fenn kell álljon. Tehát a középső sorban megint $k > 2$ fog állni.

Az elmondottak alapján az $m = 3 \cdot 2$ eset kivételével a középső sorban $k > 2$ fog állni.

b) Ha $m = 3 \cdot 2$, akkor a feltételek alapján szóba jöhető $n = 6q + 3$, $n = 6q + 4$, $n = 6q + 5$ n-es táblákon a középső sorban szintén $k > 2$ található, az $n = 6q + 2$ esetben

azonban 2. Vizsgáljuk részletesen először ezt az esetet! (q = 1-re l. 2. ábra.)

A „0", „1" számozású mezőkből álló sorpárból s így a *párokban szereplő* azonos számozású mezőkből külön-külön, a középső sor alatt és felett ugyanannyi van. Mivel ezen a táblatípuson van még egy „1" jelzésű mezőkből álló sor, mégpedig az 1. sor, amelyben $n = 6q + 2$ darab (a 2. ábrán 8 darab) mező van, így a „0" és „1" számozású mezők számának 6-os maradéka nem lehet azonos az egész táblát tekintve. A szükséges feltétel tehát nem teljesül, így az $n = 6q + 2$ tábla a középső mező elvétele után sem fedhető le 1×6-os léccel.

A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy *bármilyen $k > 2$ szám áll is a középső sorban, az adott feltételek mellett a tábla utolsó sorában nem állhat sem k, sem $k - 1$, sem $k - 2$.*

A feltételek biztosítják, hogy a középső sor feletti sorpárból („$k - 1$", „$k - 2$") a középső sor felett 1-gyel több legyen, mint alatta. [1]

Emiatt viszont a „$k - 1$" számozású mezőkből a táblán 1-gyel több van, mint a „$k - 2$" számozásúakból, s így a szükséges feltétel nem teljesülhet.

Az állítást indirekten bizonyítjuk.

a) Tegyük fel, az utolsó sorban k áll!

$$n = mq + k.$$

Mivel a táblán $2n - 1$ sor van, így

$$2n - 1 = 2mq + 2k - 1 = mq_1 + k,$$

azaz

$$2mq + k - 1 = mq_1.$$

Így $m \mid k - 1$ szükséges, ám ekkor $k = m + 1$, azaz $k = 1$ (m), ez pedig már éppen a lefedhető eset és már kizártuk.

b) Tegyük fel, az utolsó sorban $k - 1$ áll! Az *a)*-ban leírtakhoz hasonló meggondolásból adódik, hogy

$$2mq + 2k - 1 = mq_1 + k - 1$$
$$2mq + k = mq_1,$$

s így $m \mid k$. Ám ezt az esetet már szintén kizártuk.

c) Tegyük fel, az utolsó sorban $k - 2$ áll! Ekkor az előzőekhez hasonlóan

$$2mq + 2k - 1 = mq_1 + k - 2$$
$$2mq + k + 1 = mq_1,$$

így $m \mid k + 1$ szükséges, s ebből következik, hogy $k = m - 1$.

Ekkor $k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l - 1$ (1) lenne, viszont $p_i \mid n$ vagy $p_i \mid n - 1$ miatt $p_i \mid k$ vagy $p_i \mid k - 1$.

$p_i \mid k$ nem teljesülhet (1) miatt. Azonban $p_i \mid k - 1$ sem lehetséges, ugyanis ekkor ugyancsak (1) miatt $p_i \mid p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l - 2$ csak úgy teljesülhet, hiszen $m > 3$, ha $p_i = 2$, $l = 2$, azaz, ha $m = 2 \cdot 2$ alakú.

Ez utóbbi esetet vizsgáljuk kicsit általánosabban.

Ha $m = 2^t$ $(t > 1)$ alakú, akkor mivel $m \mid S_{n_1} = S_n - 1$, azaz $m \mid 3n(n - 1)$ szükséges feltétel a „lyukas" n-es tábla lefedéséhez, $(n, n - 1) = 1$ miatt $2^t \mid n$ vagy $2^t \mid n - 1$ feltételnek teljesülnie kell.

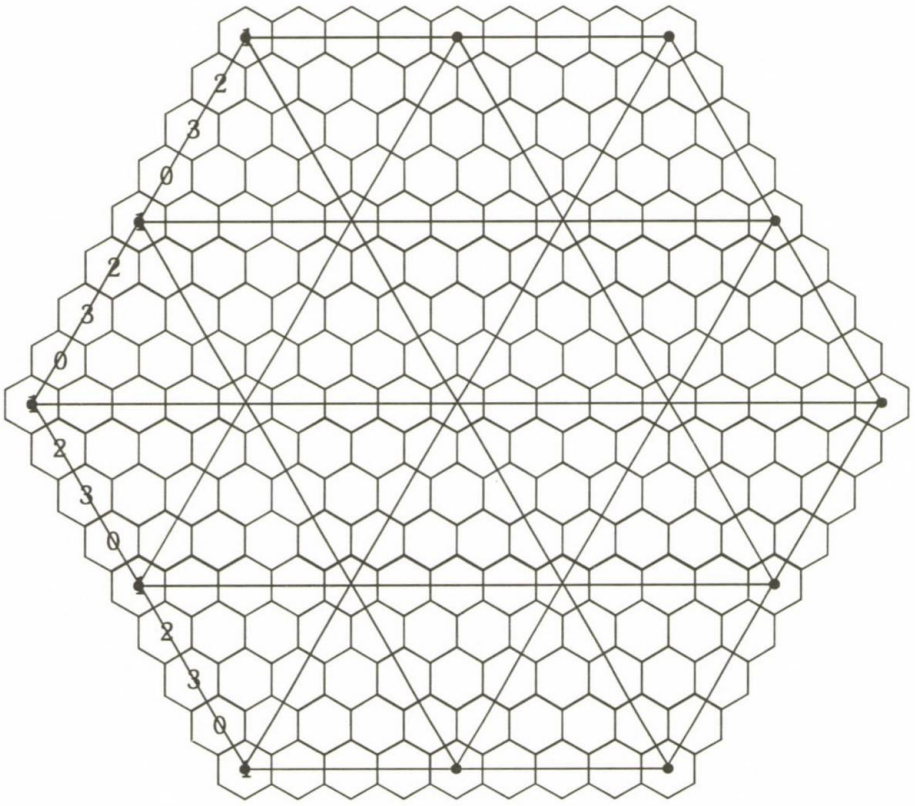
Így csak $n = 2^t \cdot q$ vagy $n = 2^t \cdot q + 1$ alakú n-es táblák esetében lehetséges a lefedés az adott módon. Ez pedig a korábban már bizonyított, „lefedhető esetek" közé tartozik. (1. ábra)

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Érdemes megjegyezni, hogy $m = 3$ esetben más módszerekkel, de az előbbiekkel összhangban az derült ki [2], hogy az $n = 3q$ ill. $n = 3q + 1$ típusú táblák mindig lefedhetők 1×3-as lécekkel a középső mező elvétele után, viszont az $n = 3q + 2$ típusú tábla sohasem. Természetesen a két lefedhető táblatípus esetében a lefedhetőség megmutatásához itt is alkalmazható az 1. ábra. Az $n = 3q + 2$ táblák esetében azonban a „lefedhetetlenség" bizonyítása az itt leírt módon nem tehető meg.

Az [1]-ben leírtak miatt, bármely n-es hatszögtáblából az eddigi számozást megtartva legfeljebb valamely középsővel egyező, k számozású mező vehető el úgy, hogy a visszamaradó „lyukas" tábla lefedhető legyen $1 \times m$-es

lécekkel ($m > 2$). Beláttuk ugyanis [1], hogy a középső sorral egyező számozású (k) mezők száma a „teljes" táblán 1-gyel több, mint a $k - 1$ jelűeké. ($m = 2$ esetén bárhonnan vehetek el egy mezőt [2].) Természetesen a tábla számozása bármely irányból elvégezhető, így a szimmetria miatt legfeljebb azok a mezők vehetők el, amelyek „minden irányból" „k" jelűek. (L. 3. ábra pontozott mezői, $m = 4$, $n = 9$.)



3. ábra

Ha viszont „k" jelű mezőt veszek el, úgy pl. a „$k - 1$" ill. „$k - 2$" jelű sorok érintetlenek maradnak, így ha $n \neq mq$ vagy $n \neq mq + 1$, akkor az előbbiekben elmondottak miatt az n-es tábla nem fedhető le $1 \times m$-es lécekkel.

Az eddigiekből következik, hogy legfeljebb az $n = mq$ ill. $n = mq + 1$ táblák pontozott mezői vehetők el úgy, hogy ezután a tábla lefedhető lesz $1 \times$ m-es lécekkel. (3. ábra) Vizsgáljuk meg először az $n = mq + 1$ típusú táblákat!

Már beláttuk, hogy ez a táblatípus $m > 1$ esetén a középső mező elvétele után lefedhető $1 \times m$-es lécekkel.

Egy lehetséges lefedési módot ad meg a 4. ábra, az $n = 4q + 1$ típusú táblákra, $q = 1$, 2, 3 esetekre. Keletkeztessük q növekedésével a táblákat egymásból ún. „m-es (4-es) gyűrű" hozzáadásával! Az így létrejövő gyűrűk lefedhetők $1 \times m$-es (1×4-es) lécekkel. (Az ábrán az áttekinthetőség kedvéért érdemes a lécek helyett $2 \times m$-es (2×4-es) egységeket (ún. blokkokat) alkalmazni.) A blokkokból kimaradó

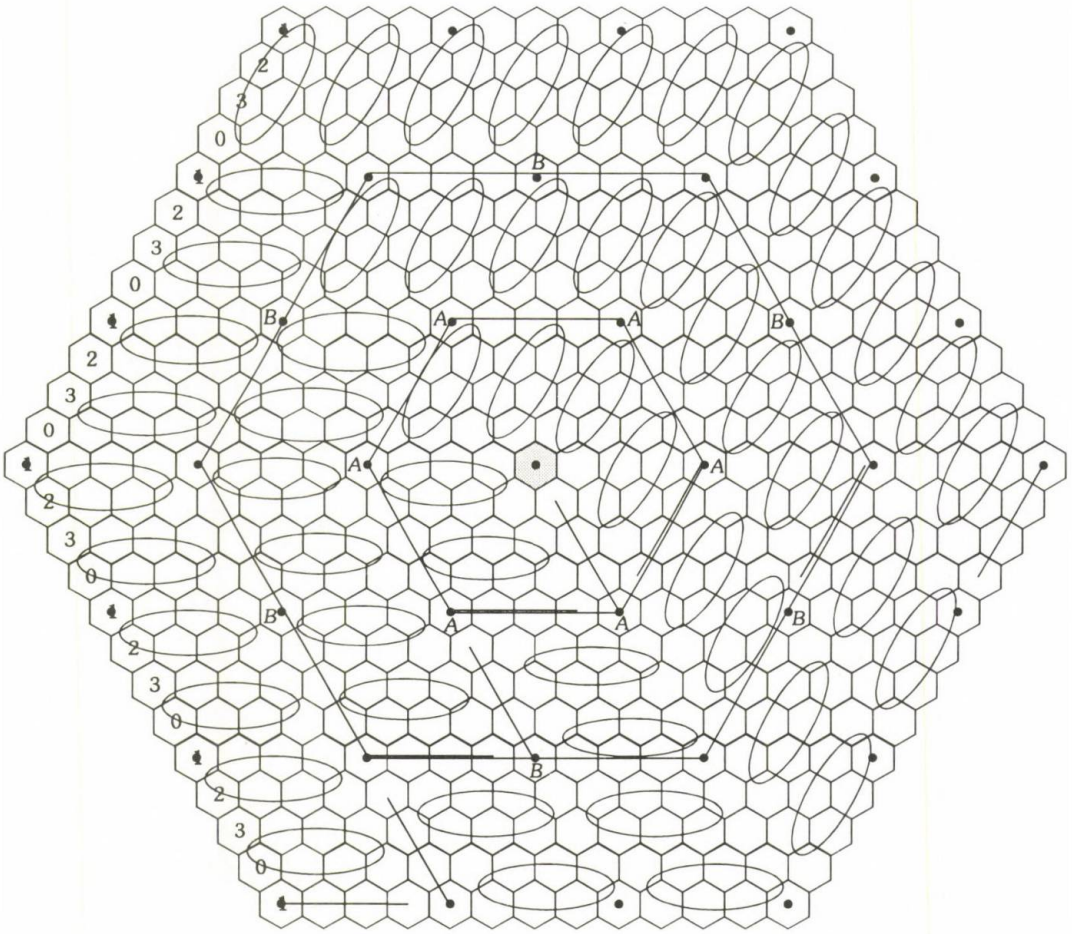
„szabad" léceket rendezzük a 4. ábrán látható módon!

E lécek „tologatásával" elérhető, hogy a pontozott mezők szabaddá váljanak, azaz elvehetők, és így a tábla, mivel a többi rész lefedésén nem változtattunk, továbbra is lefedhető maradt.

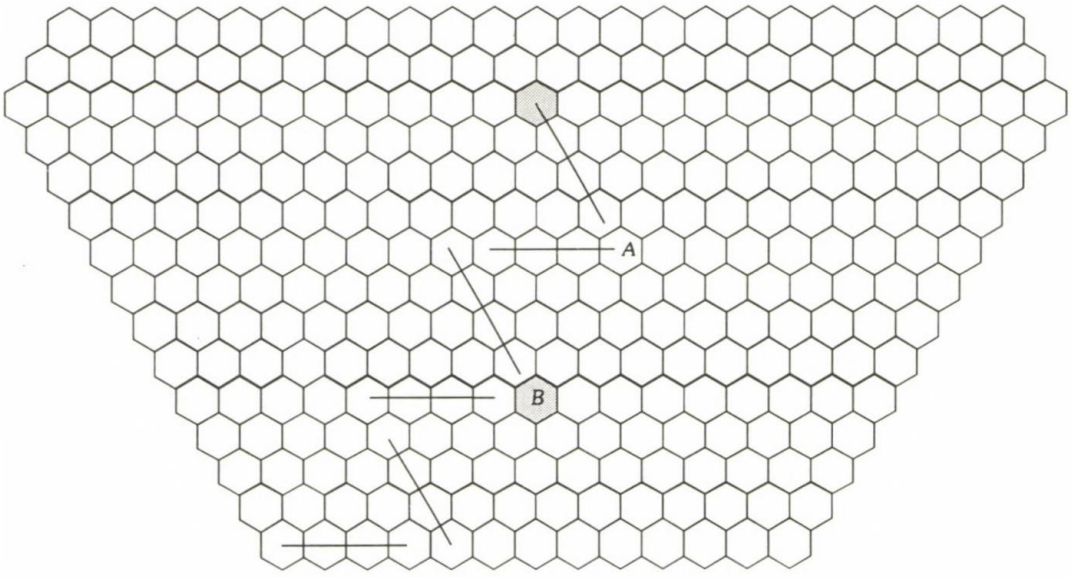
A tábla szimmetriája miatt elegendő a pontozott mezők egy-egy típusára belátni az elvehetőséget, például az A és B típusúakra. (4. ábra)

Az 5. ábra B típusú mező elvételéhez szükséges „léctologatást" mutat be példaként. Vizsgáljuk most meg az $n = mq$ típusú táblákat!

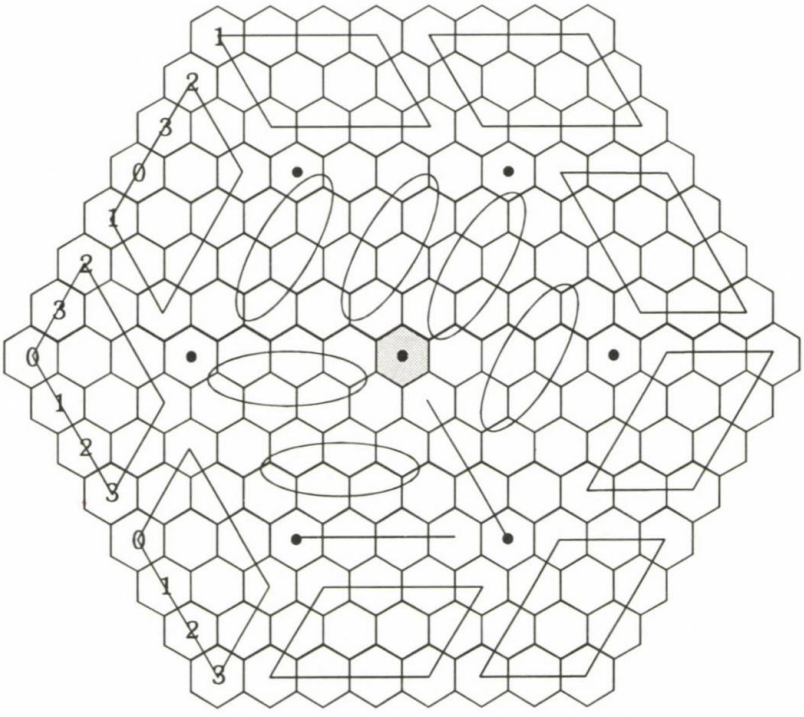
Mint már láttuk, a középső mező elhagyásával bármely ilyen tábla lefedhető $1 \times m$-es lécekkel. ($n = 4$ esetén a középsőn kívül más mező nem hagyható el.)



4. ábra



5. ábra



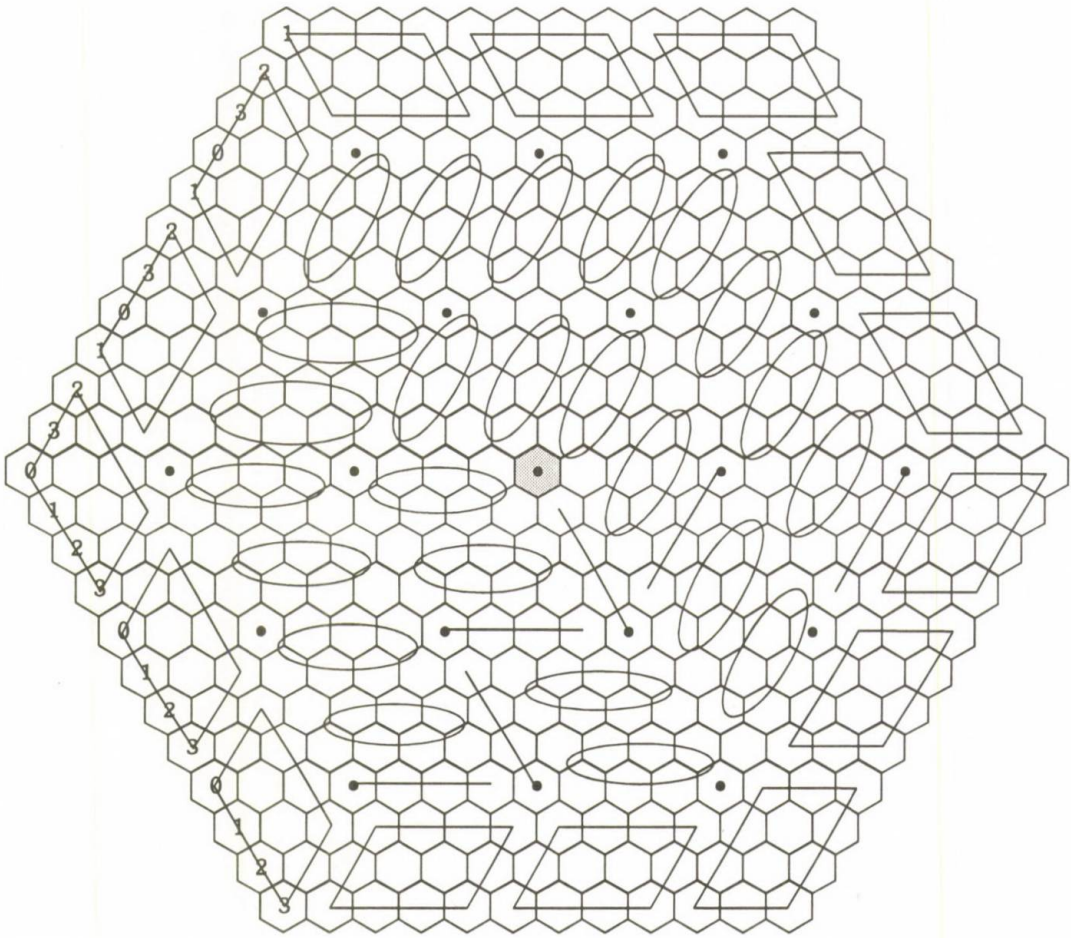
6. ábra

Használjuk fel az előbbi eredményeinket ennél a táblatípusnál.

1. Fedjük le az $n = m(q-1)+1$ „belső" táblát ($q > 1$) a középső mező elhagyása után az előbbi esetben ismertetett módon! (6. ábrán $n = 5$; $m = 4$.)

2. Az $n = mq$ táblát „$m-1$"-es („3-as") gyűrű hozzáadásával kaphatjuk. E gyűrű lefedhető $1 \times$ m-es (1×4-es) lécekkel. Az $m \times (m-1)$-es (3×4-es) paralelogrammákra bontás áttekinthetőbbé teszi az ábrát. (6-7. ábra)

3. Az $n = m(q-1)+1$ táblán vannak csak pontozott mezők, ezek az előbbi típusnál ismertetett módon elvehetők. Mivel a korábbiakban lefedett táblán további változtatás nem történt, továbbra is lefedhető, tehát a bizonyítás kész.



7. ábra

Az eredményeket összefoglalva, figyelembe véve az $m = 3$ esetre a [2]-ben leírtakat is, a következők mondhatók el:

Bármely *n*-es hatszögtábla $1 \times m$-es lécekkel, 1 mező elvétele után legfeljebb akkor fedhető le, ha $n = mq$ vagy $n = mq + 1$ típusú ($n > 1$, $m > 1$). Ez utóbbi táblákból pedig csak olyan mező hagyható el, amely az említett soronkénti, mod *m* számozást figyelembe véve a tábla középső mezejével azonos számozású, és a 3. ábrán látható szimmetria szerinti, ún. pontozott mezők közül való.

Végül adjunk még választ a feltett kérdések közül a másodikra is!

2. n-es táblát véve, a leghosszabb felhasználható léc nyilvánvalóan $2n-1$ hosszúságú lehet. Így legfeljebb $2+3+\ldots+2n-1$ mezőt tudok lefedni különböző lécekkel az n-es táblán. Az így lefedett mezők száma:

$$\frac{(2+2n-1)(2n-2)}{2} = (2n+1)(n-1) = 2n^2-n-1\,.$$

Mivel a tábla mezőinek a száma S_n, minden n-re nagyobb, mint ez utóbbi kifejezés, a 2. kérdésben említett lefedés nem lehetséges.

Ugyanis felhasználva az n-es tábla mezőinek számára vonatkozó összefüggést, az $3n^2-3n+1 > 2n^2-n-1$ egyenlőtlenséget kell csupán igazolnunk, minden n-re. Ez pedig valóban igaz, hiszen azonos átalakítással az $(n-1)^2+1>0$ adódik belőle.

Azaz nincs olyan hatszögtábla, amely lefedhető lenne csupa különböző hosszúságú léc felhasználásával.

A cikket olvasva valószínűleg már többekben meg is fogalmazódott néhány újabb kérdés a hatszögtáblákkal kapcsolatban. Ha van idejük és kedvük, bizonyára többre megtalálják a pontos választ is, s talán diákjaikkal együtt is eltűnődnek hasonló problémákon.

Irodalom

[1] Ambrus G.: Lefedések hatszögtáblán – egy meglepő eredmény. A matematika tanítása. II. évf. 4. szám, 1994. 6.-9.o.

[2] Ambrus G.: Lefedések hatszögtáblán Matematikatanár-képzés–matematikatanár-továbbképzés. 1994. 2. szám, 93.-105. o.

Hírek

1995. november 11-én rendezték meg Tatán az Eötvös Gimnáziumban a XVI. Öveges József Emlékversenyt 1. és 2. osztályos középiskolás tanulók részére.

A verseny feladatai matematikából a következők voltak:

1. Száz darab pozitív egész szám szorzata 1995. Hány ilyen számszázas van? Add meg a számszázasokat úgy, hogy a tényezők csökkenő sorrendben kövessék egymást!

2. Adott egy vasdrótból készült, 1 m élű kocka élváza. A kocka egyik csúcsában van egy „jól látó", „okos" és „mágneses" pók. Az élváz mely pontjaihoz kell rögzítenünk három legyet, ha azt akarjuk, hogy a pók a lehető leghosszabb út megtételére kényszerüljön, ha mindhárom legyet el kívánja fogyasztani? Mekkora ennek az útnak a teljes hossza? Indokold meg, hogy miért nem kényszeríthető hosszabb út megtételére! (A pók csak a vasdróton tud mozogni, ki tudja választani a legrövidebb utat, és a légy nem tud elbújni előle.)

3. Egy 1000 m^2-es sík területre időben egyenletesen, a hely szempontjából pedig egyenletes rendezetlenségben 41 másodpercig esik a jég. Az egyforma gömböket jelentő jégdarabok olyan talajra hullanak, amelyben csupán kissé nyomódnak bele, ugyanakkor csak azok mozdulnak tovább beérkezési helyükről, amelyek társaikra estek. Az utolsó másodpercben lehullott 20 000 jégdarab közül 200 esett az első 40 másodpercben lehullott valamelyik társára.

a) A terület hány százalékát borítja jég?

b) Mekkora egy jéggömb főkörének (a középpontján átmenő síkba eső metszetének) területe?

Feladatok 1996-tal kapcsolatban

Az 1996-os évszámmal kapcsolatos pályázati felhívásunkra beküldött pályamunkák közül ebben a számban a makói Kálvin Téri Általános Iskola 7. a osztályos tanulóinak gyűjtéséből válogattunk.

A feladatsort összeállították: André Róbert, Hegyes Balázs, Tábith László, Kispéter Csaba, Oravecz Viktor, Nagy Adrienn, Marosi András 7. a osztályos tanulók.

1. Hány perc 1996 óra?

2. Az 1 9 9 6 számkártyák felhasználásával, kirakható négyjegyű számok közül mennyi az összege a legkisebb és a legnagyobb számnak?

3. Mennyi $(-1)^{1995} + 1^{1996} + (-1)^{1997}$?

4. Mennyi az $(1996 + 1996 + 1996 + 1996) : 4$ műveletsor eredménye?

5. Az alábbi törtek közül melyik a legkisebb?

$$\frac{1994}{1995}, \frac{1995}{1996}, \frac{1996}{1994}, \frac{1995}{1994}, \frac{1996}{1995}, \frac{1994}{1996}$$

6. Két egymás utáni páratlan szám négyzete: 3980025, 398009. Melyik a köztük lévő páros szám?

7. Pisti hosszas számolgatás után1996-ot kapott eredményül. Később jött rá, hogy az utolsó műveletben 96-ot hozzáadott 96 kivonása helyett. Melyik számot kapja végeredményül, ha az utolsó műveletet is helyesen végzi el?

8. Hány olyan 1996-nál kisebb pozitív egész szám van, amelyben pontosan kétszer szerepel a hármas számjegy?

9. Egy gyerek hátára nyúlós gumit kötöttek, így kellett egy 1996 dm-es hosszú pályán végig menni. Minden nekirugaszkodással 32 dm-t megy előre, de 28 dm-t visszacsúszik. Hány nekirugaszkodással teszi meg a távot?

10. Mennyi lesz az

$$\frac{1}{1996} + \frac{2}{1996} + \frac{3}{1996} + \ldots + \frac{1995}{1996} + \frac{1996}{1996}$$

összeadás eredménye?

11. Ha 0-tól 1996-ig leírjuk az egész számokat, akkor hány számjegyet írunk le?

12. Ha 1-től kezdve egymás után leírjuk a pozitív egész számokat addig, amíg leírunk 1996 számjegyet, melyik természetes szám, melyik számjegyéig jutunk el?

13. Ha összeadjuk az első 1996 darab pozitív egész számot, milyen számjegy áll az így kapott összegben az egyesek helyén?

14. Az 1 9 9 6 számkártyákból képezzük az összes négyjegyű egész számot. A kapott számok közül hány lesz 4-gyel osztható?

15. Mennyi 4^{1996}-nak a fele?

16. Az 1996-nak hány osztója van?

17. Az 1*9*9*6 kifejezésben mindegyik csillag helyére írjuk be a négy műveletijel valamelyikét! A műveleteket tetszőleges számú zárójel felhasználásával elvégezve melyik a lehető legnagyobb és a lehető legkisebb előállítható szám?

18. Hány elemű az a legbővebb halmaz, amelynek elemei az egész számok és értékük nagyobb, mint –1996, de nem nagyobb mint +1996?

19. Egy kikötőből 5 hajó indul 1991 januárjában. Az első hajó havonta ér vissza a kikötőbe és megint elindul. A második hajó 2 havonta ér vissza a kikötőbe és újra elindul, a harmadik 3 havonta, a negyedik 4 havonta, az ötödik 5 havonta ér és visszaindul. Mikor találkozik az öt hajó ismét a kikötőbe?

20. Az erdőbe négy fiú: Zoli, Laci, Jani, Balázs gombát gyűjtenek. Zoli így szól: ha én adok Janinak 20 gombát, Laci pedig ad nekem 31 gombát és Balázsnak 42 gombát, Jani ad 4 gombát Lacinak és még Balázs ad Janinak 21 gombát, akkor mindannyiunknak ugyanannyi gombája lesz. Összesen pedig 1996 gomba van. Mennyi gombája volt egyenként a fiúknak?

21. Egy királynak 1996 ablakú kastélya van. Elküldi az első szolgáját, hogy minden második ablakba tegyen gyertyát. A második szolgáját, hogy minden harmadik ablakba, a harmadik szolgáját, hogy minden ötödik ablakba tegyen gyertyát. Hány ablakba lesz 3 db gyertya?

22. Felírjuk 1-től 1996-ig a számokat, és ezeket beletesszük egy dobozba. Bekötött szemmel legkevesebb hány számot kell kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük három olyan, amelyek egymás után következnek?

23. Mennyi a következő kifejezés értéke:

$$\left[\left(1^9\right)^9\right]^6 = ?$$

24. Számítsd ki a következő tört értékét:

$$\frac{1}{9+\frac{9}{6}}$$

25. Keressöünk olyan számtani sorozatot, melynek összege 1996 és a differencia (különbség) az 1996-nak két különböző számjegye!

26. Vegyünk egy négyzetet, osszuk négy négyzetre, egyet elveszünk, azt is négy négyzetre osztjuk. Eljuthatunk-e ezzel az eljárással 1996 db négyzethez?

27. Az $1996 \cdot 1996 \cdot 1996 + 1996 \cdot 1996 \cdot 1996$ összegben az 1996 helyett mindenütt a kétszeresét írjuk. Hányszorosára növekszik az összeg?

28. 1996 darab 1 cm^3-es kockából készítsünk téglatestet, melynek élei különböző egész számok! Mennyi lesz a téglatest felszíne?

29. Két pozitív egész szám reciprokának összege megegyezik 1996 reciprokával. Hány ilyen számpárt találunk?

30. Melyik a nagyobb?

$$A = 1996^2 \cdot 1997 + 1996^2$$

$$B = 1998 \cdot 1996^2 - 1996^2$$

31. Milyen számjegyre végződik az

$$1^{1996} \cdot 2^{1996} \cdot 998^{1996}$$

szorzat?

32. Határozzuik meg azt a legkisebb természetes számot, amelyben a számjegyek összege 1996!

33. Írjunk az 1996 számhoz jobbra és balra egy-egy számjegyet úgy, hogy a kapott hatjegyű szám osztható legyen 11-gyel!

Matematika feladatmegoldó pontverseny

III. forduló

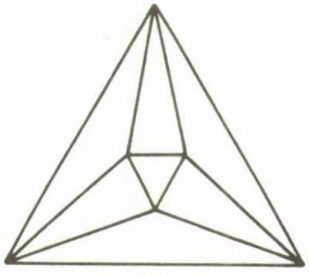
Kitűzött feladatok 11-12 éveseknek (5-6.osztály)

96.1. Egy sakktáblára 8 bástyát akarunk elhelyezni úgy, hogy egyik se üsse a másikat. Hányféleképpen lehetséges ez?

96.2. Egy olyan hétszöget rajzoltunk, amelynek mindegyik szöge 180°-nál kisebb és meghúztuk az összes átlóját. Azt tapasztaltuk, hogy a hétszög belsejében minden ponton legfeljebb két átló halad át. Hány olyan háromszöget határoznak meg ezek az átlók, amelyeknek mindegyik csúcsa a hétszög belsejében van?

96.3. Egy vastag könyv kötése megrongálódott, a könyv egy összefüggő része kiesett. Kiderült, hogy a kiesett rész első és utolsó oldalán is olyan háromjegyű szám van, amely a 3, 5 és 6 számjegyekből áll, csak más-más sorrendben.
Hány oldalas a könyvből kiesett rész?

96.4. „Piros" és „kék" felváltva lépnek a következő játékban. Piros kezd. Egy lépés abból áll, hogy a mellékelt „térképen" egy még „színtelen" „országot" a játékos a saját színére fest. A közös határvonallal rendelkező országok nem lehetnek azonos színűek.



Az veszít, aki nem tud lépni, bár még van színtelen ország. Döntsük el, hogy pirosnak, a kezdőnek vagy kéknek van-e nyerő stratégiája, azaz olyan lépéssorozata, amellyel ellenfele bármely lépése esetén győzni tud! (A külső, a nagy háromszögön kívüli síkrész is egy országnak számít!)

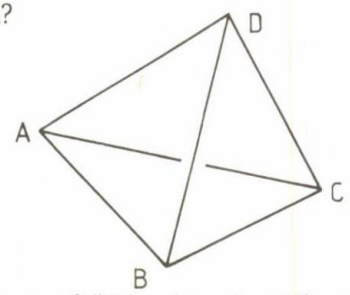
Kitűzött feladatok 13-14 éveseknek (7-8. osztály)

96.5. Válasszunk tetszőlegesen öt egész számot (például: 2, 5, 7, 11, 19), majd írjuk őket más sorrendbe (például: 5, 7, 11, 19, 2)! Ezután kivonjuk egymásból az első, a második és így tovább, az ötödik helyen álló számokat ($2-5=-3$, $5-7=-2$, $7-11=-4$, $11-19=-8$, $19-2=17$), majd a kapott számokat összeszorozzuk (példánkban: $(-3)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot(-8)\cdot 17=3264$). Igazoljuk, hogy az eredmény mindig páros szám lesz!

96.6. Mutassuk meg, hogy bármilyen 1-nél nagyobb n egész számot választunk is, meg lehet adni a síkon egyeneseket úgy, hogy ezek a síkot éppen n részre darabolják fel!

96.7. Adjuk meg az összes olyan 100-nál nemnagyobb pozitív egész k számot, amelyre igaz a következő tulajdonság: bármely olyan k-nál kisebb, de 1-nél nagyobb egész szám, amely k-hoz relatív prím, prímszám!

96.8. Az $ABCD$ szabályos tetraéder oldaléle 2 egység. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely áthalad az A csúcson, a BD és CD élek felezőpontján és az ABC lap középpontján?



A versenyfelhívás A matematika tanítása 1995. évi 4. számában olvasható. A megoldásokat a következő címre kérjük küldeni:

MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.

A borítékra kérjük, írják rá: Matematika feladatmegoldó pontverseny.

A beküldési határidő: **1996. február 28.**

Az 1995/96. tanévi matematika feladatmegoldó pontverseny I. fordulóban kitűzött feladatok megoldása

A feladatok szövege az 1995/4. szám 29. és 30. oldalán olvasható.

95.17. *a)* Egy további megoldás:

$$58 \cdot 3 = 29 \cdot 6 = 174.$$

b) Még 8 további megoldás:

$$27 \cdot 594 = 16\,038;$$
$$54 \cdot 297 = 16\,038;$$
$$36 \cdot 495 = 17\,820;$$
$$45 \cdot 396 = 17\,820;$$
$$52 \cdot 367 = 19\,084;$$
$$78 \cdot 345 = 26\,910;$$
$$46 \cdot 715 = 32\,890;$$
$$63 \cdot 927 = 58\,401.$$

95.18. Jelöljük a januárban megtakarított forintok számát j-vel, a februárban félretettét f-fel (tudjuk, hogy $j > f$)! Ezután az egyes hónapokban félretett pénzt a feltétel szerint könnyű kiszámítani: márciusban: $j + f$, áprilisban: $j + 2f$, májusban: $2j + 3f$, és így tovább, végül decemberben: $55j + 89f$ forint.
A feltétel szerint:

$$55j + 89f = 1050.$$

Mivel $55j$ és 1050 is 5-tel osztható számok, az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha f is 5-tel osztható.

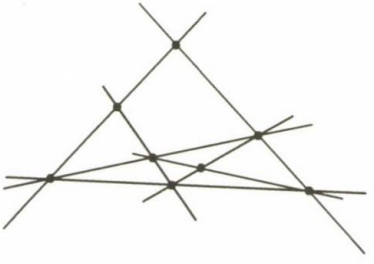
Ha $f = 5$, akkor $55j = 605$, tehát $j = 11$. Ha $f = 10$, akkor $55j = 160$, j nem egész szám. Ha $f = 15$, akkor $89f$ már nagyobb, mint 1050, ami nem lehet.

Az egyetlen megoldás tehát: januárban 11, februárban 5 forint volt a megtakarított pénz.

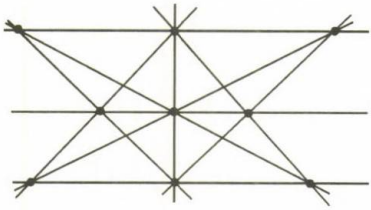
95.19. A 6 pont esetére a következő ábra mutatja, hogy 4 egyenest kaphatunk és

mindegyik egyenesen 3 pont van. Nem nehéz végiggondolni, hogy ennél több egyenest nem kaphatunk.
A 7 pont esetén 6 egyenes érhető el.

A 8 ponthoz 7 egyenes tartozhat úgy, hogy minden egyenesen pontosan 3 pont van az adott 8 pont közül.

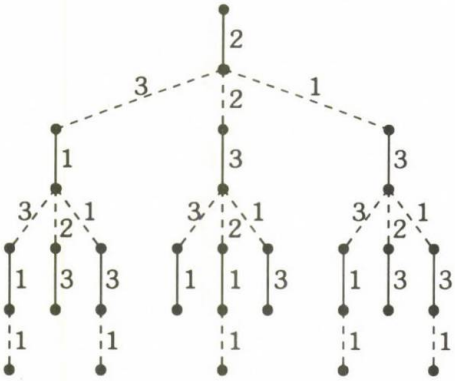


A 9 ponthoz 10 egyenest lehet megadni.

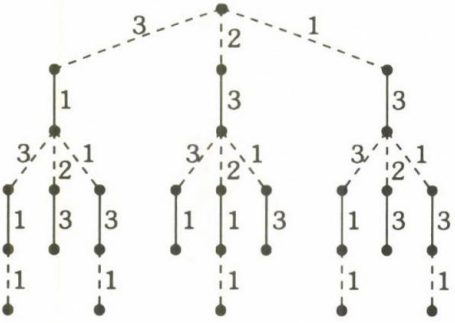


Annak igazolása már több meggondolást igényelne, hogy a megadottnál több egyenes nem érhető el.
Érdekes, hogy az n pont esetére nem ismert általános képlet az egyenesek számára.

95.20. A 11 gyufaszál esetén A-nak, a kezdőnek van nyerő stratégiája, ezt a következő ábráról olvashatjuk le. Az A lépéseit folytonos vonallal, B lépéseit szaggatott vonallal jeleztük. Minden „ágon" könnyű összeszámolni, hogy A páros számú gyufát gyűjtött össze.



A 9 gyufaszál esetére B-nek, a válaszoló játékosnak van nyerő stratégiája. Ezt is a következő ábráról olvashatjuk le, ahol A lépéseit szaggatott, B lépéseit folytonos vonallal szemléltettük.



95.21. Jelölje x a téglalap egyik, y a másik oldalának hosszát (egységnek választjuk a „kockás" papír kis négyzetének oldalhosszát). Ekkor a befestett kis négyzetek száma:

$$2x + 2(y - 2),$$

a középső, fehéren maradó kis négyzetek száma:

$$(x - 2)(y - 2).$$

A feltétel szerint a kettő egyenlő:

$$2x + 2(y - 2) = (x - 2)(y - 2),$$

ennek átalakításával:

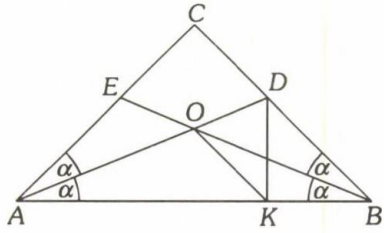
$$xy - 4x - 4y + 8 = 0.$$

Ebből szorzattá alakítással:

$$(x - 4)(y - 4) = 8.$$

Feltehetjük, hogy $x \leq y$, így két megoldást kapunk: $x_1 = 5$ és $y_1 = 12$, vagy $x_2 = 6$, $y_2 = 8$.

95.22. Az ábra jelöléseit használjuk. K legyen az O, D és B pontokon áthaladó kör középpontja. Mivel OKB egyenlő szárú háromszög ($OK = BK$), így $KOB\sphericalangle = \alpha$. Hasonló módon adódik, hogy $KDB\sphericalangle = 2\alpha$ ($DK = BK$). Mivel $DOB\sphericalangle$ az ABO háromszög külső szöge, $DOB\sphericalangle = 2\alpha$, tehát $KOD\sphericalangle = 3\alpha$. Az OKD háromszög is egyenlő szárú ($OK = DK$), így $ODK\sphericalangle = 3\alpha$.



Az ABD háromszög szögeinek összege 180°, tehát:

$$8\alpha = 180°,$$

amiből

$$2\alpha = 45°.$$

Így az ABC háromszög szögei: 45°, 45° és 90°.

95.23. Számítsuk ki az eredetileg a táblára írt számok összegét:

$$1+2+3+\ldots+1994=\frac{1995\cdot 1994}{2}=$$
$$=1995\cdot 997,$$

ami páratlan szám.

Vizsgáljuk meg, mennyivel csökken ez az összeg egy lépés során! Legyen a két letörölt szám x és y.

Ekkor az összeg a következő értékkel csökken:

$$x+y-|x-y|=\begin{cases}2y, & \text{ha } x\geq y,\\ 2x, & \text{ha } x<y.\end{cases}$$

Ez mindkét esetben páros szám. Mivel a kiinduló összeg páratlan és minden lépésben páros számmal csökken, a fennmaradó számok összege mindig páratlan. Ez azt jelenti, hogy egyedül a 0 soha sem marad a táblán.

95.24. A játék egy átfogalmazása a 95.20. feladatban kitűzött játéknak, így a megoldás is szó szerint átfogalmazható.

Az $x+y=11$ egyenletű „célegyenes" esetén A-nak van nyerő stratégiája, ezt a 95.20. feladat megoldásából olvashatjuk le. Az $x+y=9$ egyenletű egyenes esetén B-nek van nyerő stratégiája, ezt is leolvashatjuk a 95.20. feladat megoldásában közölt gráfról.

Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: 6721 Szeged, Pusztaszeri u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:**

1996. február 29.

61. Jelölje H az első n pozitív egész szám halmazát ($n>1$). H minden egyes eleméhez rendeljük hozzá a legnagyobb pozitív páratlan osztóját, legyen ezek halmaza D! D-ben a $4k+1$ vagy a $4k+3$ alakú számok vannak többen ?

62. Az ABC háromszög oldalegyenesein vegyük fel a P, Q, R pontokat ($P\in BC$, $Q\in CA$, $R\in AB$). Igazoljuk, hogy az AP, BQ és CR átmérőjű körökből alkotható körpárok hatványvonalai a háromszög magasságpontjában metszik egymást !

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

63. Az $y=\frac{x^2}{4}$ és az $y=p-(x-5)^2$ egyenletű parabolák által határolt terület mérőszáma a p paraméter mely értéke esetén lesz 360 területegység, ha a két parabola metszéspontjainak koordinátái egész számok ?

Fitos László, Esztergom

64. Mely pozitív egész n értékek esetén létezik olyan $P(x, y, z)$ polinomfüggvény, amelyre a változók bármely valós értéke esetén

$$x^n+y^n+z^n=$$
$$=(x+y+z)\cdot P(x,y,z)+n\cdot x\cdot y\cdot z\ ?$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

65. Legyen M az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet síkjának tetszőleges pontja, és jelölje α az AMC, β a BMD szöget. Határozzuk meg azon M pontok halmazát, amelyekre

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta=2t^2,$$

ahol $t>0$ paraméter !

Bencze Mihály, Brassó

66. Legyen M n pontból álló halmaz a térben ($n \geq 3$)! E pontokat összekötő szakaszok legyenek mind különböző hosszúságúak, és közülük r darabot színezzünk pirosra. Legyen m az a legkisebb egész szám, amelyre $m \geq 2\frac{r}{n}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindig van olyan egymáshoz csatlakozó piros szakaszokból álló „út", amelyet m darab, növekvő hosszúság szerint rendezett szakasz alkot !

Ambrus Gabriella, Budapest

Feladatmegoldások (43-48. feladatok)

43. Adott a síkban n darab pont. Az ezek által meghatározott egyenesek adta metszéspontok között legfeljebb hány olyan van, amely az adott pontoktól különbözik ?

Mészáros József, Galánta

I. megoldás: Az n különböző pontból $\binom{n}{2}$ egyenes képezhető. A pontok kedvező megválasztása esetén ezek páronként metszik egymást, de csak az adott pontokon megy át több egyenes, nevezetesen n-1 darab. Egy ilyen pont $\binom{n-1}{2}$ metszés eredménye. Ezek alapján az adott pontoktól különböző metszéspontok maximális száma :

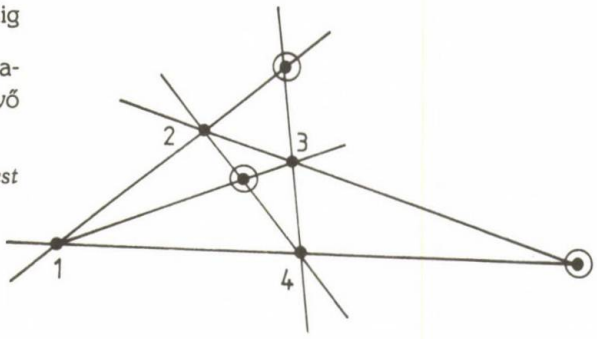
$$\left(\binom{n}{2}\right) - n \cdot \binom{n-1}{2} =$$

$$= \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n^2-n-2}{2}}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} .$$

Dályay Pál Péter, Szeged

II. megoldás: Feltehetjük, hogy $n \geq 4$, ugyanis 4-nél kevesebb adott pont esetén nem jön létre új metszéspont. Tetszőleges 4 pont legfeljebb 6 egyenest, ezen egyenesek pedig legfeljebb 3 újabb pontot határoznak meg az *1. ábrának* megfelelően.



1. ábra

n pont közül 4 kiválasztására $\binom{n}{4}$ lehetőségünk van. Minden kiválasztásnál legfeljebb három új pontot kaphatunk, így az adott pontoktól különböző metszéspontok száma legfeljebb

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} .$$

Csorba Ferenc, Győr
Tóth Sándor, Sárospatak

A megoldók száma: 7.

44. A $p < q < r$ prímeket hármasikreknek nevezzük, ha $q - p$ és $r - q$ különbségek 2-nél nem nagyobbak. Hány hármasikerprím van ?

Ambrus Gabriella, Budapest

I. megoldás: A 2, 3, 5 és a 3, 5, 7 prímek hármasikrek. Több ilyen hármasiker nincs, ugyanis $p > 3$ esetén az összes prím páratlan, s három egymást követő páratlan szám egyike 3-mal osztható, így biztosan összetett.

Csorba Ferenc, Győr

II. megoldás: Írjuk fel a pozitív egész számokat a következő, hat oszlopból álló végtelen táblázatba!

1	**2**	**3**	4	**5**	6
7	8	9	10	**11**	12
13	14	15	16	**17**	18
19	20	21	22	**23**	24
25	26	27	28	**29**	30
31	**32**	...			
⋮					

Ebben az elrendezésben a 2 alatt páros számok, a 3 alatt 3-mal osztható számok, a 4 alatt páros számok, a 6 alatt 6-tal osztható számok lesznek. A második sortól kezdődően tehát a prímszámok csupán az első vagy az ötödik oszlopba kerülhetnek. Az ikerprímek tehát kivétel nélkül úgy fognak elhelyezkedni ebben a táblázatban, hogy a két szám közül a kisebbik az ötödik oszlopban, a másik a következő sor elején lesz. Ez azt jelenti, hogy a második sor alatt nem lesz több hármasikerprím. A két lehetséges hármas tehát: 2, 3, 5 és 3, 5, 7.

Horváth Géza, Zselíz

A megoldók száma: 11.

45. Legyen $a_n = \sum_{k=1}^{n} (8k+17)$. Hány négyzetszám van az $\{a_n\}$ sorozatban ?

Megoldás: Elvégezve az összegzést, adódik, hogy

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (8k+17) = 8 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + 17n =$$
$$= 4n(n+1) + 17n = 4n^2 + 21n.$$

Mivel bármely pozitív egész n esetén

$$(2n+3)^2 \le a_n < (2n+6)^2,$$

ezért a_n legfeljebb három n értékre négyzetszám. Rövid számolással adódik, hogy $n = 1$ és $n = 25$ esetén négyzetszámot kapunk, nevezetesen $a_1 = 5^2$ és $a_{25} = 55^2$.

Kocsis Orsolya, Szolnok
László Sándor, Szombathely

A megoldók száma: 12.

46. Egy 3×3-as bűvös négyzet elemei különböző pozitív egészek. Bármely sor vagy oszlop három elemének a szorzata megegyezik. Legalább mekkora a táblázat legnagyobb eleme ?

Blázsik Zoltán, Szeged

Megoldás: A szorzatokra adott feltétel alapján a bűvös négyzetbe beírt számok szorzata köbszám. Ez azt jelenti, hogy a szorzat prímtényezős felbontásában valamennyi prím kitevője hárommal osztható. Célunk a lehető legkisebb prímek és a lehető legkisebb kitevők megtalálása.

A legnagyobb elem 9-nél nem kisebb, és 9 sem lehet, hiszen az első 9 pozitív egész szorzatára nem teljesül a feltétel. A maximális elem a 10 sem lehet, ugyanis ekkor a kilenc elem szorzatában az 5 vagy első, vagy második hatványon szerepel, és nekünk egyik sem jó. Hasonló okokból nem lehet legnagyobb elem a 14 sem. Nem lehet legnagyobb a 11 és a 13 sem, hiszen prímek, és így csak egyszer fordulnának elő a szorzatban. Ha 12 lenne a bűvös négyzet legnagyobb eleme, akkor a négyzetben nem fordulhatna elő az 5, 7, 10, 11 számok egyike sem, a maradék 8 szám pedig kevés. A 15 viszont lehet legnagyobb elem, így egy lehetséges konstrukció:

5	12	2
8	1	15
3	10	4

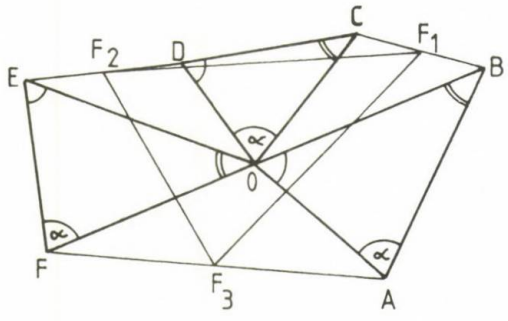
(Több megoldás alapján)

A megoldók száma: 4.

47. Az azonos körüljárású, közös belső pont nélküli *OAB, DOC* és *EFO* háromszögek hasonlók (a megfelelő csúcsokat azonos sorrendben soroltuk fel). Bizonyítsuk be, hogy a *BC, DE* és *FA* szakaszok felezőpontjai az adottakhoz hasonló háromszög csúcsai !

András Szilárd, Csíkszereda

Megoldás: Legyenek a BC, DE és FA szakaszok felezőpontjai rendre F_1, F_2, F_3, és legyen $EFO\sphericalangle = OAB\sphericalangle = DOC\sphericalangle = \alpha$. (*2. ábra*)



2. ábra

A fenti jelöléseket figyelembe véve

$$\overrightarrow{F_3F_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

és (1)

$$\overrightarrow{F_3F_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Mivel az OAB, DOC és EFO háromszögek hasonlóak, ezért ha $\dfrac{|\overrightarrow{FE}|}{|\overrightarrow{FO}|} = \lambda$, akkor $\dfrac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OC}|} = \lambda$. Vegyük észre, hogy $\overrightarrow{FE}$ a $\lambda \cdot \overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{AO}$ a $\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OD}$ pedig a $\lambda \cdot \overrightarrow{OC}$ α szögű elforgatottja, ezért (1) figyelembevételével adódik, hogy $\overrightarrow{F_3F_2}$ a $\lambda \cdot \overrightarrow{F_3F_1}$ α szögű elforgatottja. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az $F_2F_3F_1$ háromszög hasonló a feladatban megadott háromszögekhez.

Ambrus Gabriella, Budapest

Megjegyzések: 1. Az állítás a fentivel analóg módon bizonyítható a komplex számok tulajdonságainak felhasználásával is. Ezzel a módszerrel adott elegáns bizonyítást a feladatra *Tuzson Zoltán Székelyudvarhelyről* és *Ványa István Szegedről*.

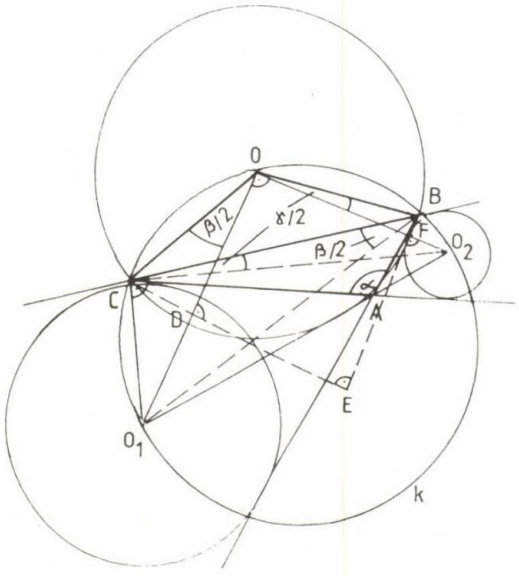
2. A feladat állítása közvetlen következménye az alábbi **tételnek**: Ha a síkban az $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ és $C_1C_2C_3$ háromszögek hasonlók (azonos indexek megfelelő csúcsokat jelölnek), és a megfelelő csúcsok egyező körüljárás szerint következnek, akkor az $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ és $A_3B_3C_3$ háromszögek $S_1S_2S_3$ súlypontjai az $A_1A_2A_3$ háromszöghöz hasonló háromszög csúcsai. (A tétel és bizonyítása megtalálható: Hajós–Neukomm–Surányi: Matematikai versenytételek II. Kötet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986. 107-108. oldal; az 1941/3. feladat általánosítása.)

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 9.

48. Az ABC háromszög köré írt körnek az AB és az AC oldalakhoz írt körökkel való hatványvonalai (a közös húrok egyenesei) merőlegesek egymásra. Mekkora a CAB szög?

Kiss Sándor, Szatmárnémeti



3. ábra

Megoldás: A *3. ábra* jelöléseit használjuk. Kössük össze a háromszög körülírt körének O középpontját a hozzáírt körök O_1 és O_2 középpontjával! Az összekötő szakaszok egyúttal a közös húrok felezőmerőlegesei is, így $OFE\sphericalangle = ODE\sphericalangle = 90°$. Mivel a feladat felté-

tele szerint $DEF\sphericalangle = 90°$ is teljesül, ezért $DOF\sphericalangle = 90°$.

A hozzáírt körök középpontjai illeszkednek a szemközti csúcsból induló belső szögfelezőre, valamint az egy csúcshoz tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, ezért az O_1O_2B háromszögben $O_1BO_2\sphericalangle = 90°$ és az O_1O_2C háromszögben $O_1CO_2\sphericalangle = 90°$.

A B, O és C pontokból az O_1O_2 szakasz derékszögben látszik, így ezek a pontok rajta vannak O_1O_2 Thalesz-körén (k).

A szögfelezés miatt $O_1BC\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$ és $O_2CB\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$. A kerületi szögek tételéből adódóan $O_1OC\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$ és $O_2OB\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$. A BOC háromszögben tehát

$$BOC\sphericalangle = 90° + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}. \qquad (1)$$

Ha $CAB\sphericalangle = \alpha$, akkor a kerületi és középponti szögek közötti összefüggés miatt a kisebbik CB ívhez tartozó középponti szögre nézve $BOC\sphericalangle = 360° - 2\alpha$. Ezt és (1)-et összevetve kapjuk, hogy $\alpha = 120°$.

Tóth Sándor, Sárospatak

A megoldók száma: 3.

A megoldók névsora: Ambrus Gabriella, Budapest (45., 47.); Barta László, Benczúrfalva (43-45., 47., 48.); Bíró Bálint, Eger (43-47.); Csorba Ferenc, Győr (43. 2 mód, 44-47.); Dályay Pál Péter, Szeged (43. 2 mód, 44-48.); Horváth Géza, Zselíz (44.); Kocsis Orsolya, Szolnok (43-45.); László Sándor, Szombathely (44., 45.); Mészáros József, Galánta (45., 46.); Simon József, Csíkszereda (43., 44., 45. 2 mód, 47.); Tóth Sándor, Sárospatak (43. 2 mód, 44., 45., 47., 48.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (44., 45. 3 mód, 46., 47.); Ványa István, Szeged (44., 45., 47.).

Az új lap feladatrovatának indulása óta eltelt időszak legeredményesebb feladatmegoldói:

Ambrus Gabriella, Budapest
András Szilárd, Csíkszereda
Barta László, Benczúrfalva
Bíró Bálint, Eger
Blázsik Zoltán, Szeged
Csete Lajos, Markotabödöge
Csorba Ferenc, Győr
Horváth Géza, Zselíz
Kocsis Orsolya, Szolnok
László Sándor, Szombathely
Mészáros József, Galánta
Simon József, Csíkszereda
Tóth Sándor, Sárospatak
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely.

A felsorolt kollégák eddigi eredményes munkájuk elismeréseképpen könyvjutalomban részesülnek, amelyet postán küldünk el.

Gratulálok a korábbi rovatvezető, Pogáts Ferenc és a magam nevében is!

Kosztolányi József

MOZAIK KIADVÁNYOK A TANKÖNYVJEGYZÉKEN

1996/97

MATEMATIKA

Matematikai ismeretek
13-14 éveseknek

Matematika
Összefoglaló feladatgyűjtemény
10-14 éveseknek

Jól felkészültem-e?
Matematikai feladatsorozatok
5., 6., 7., 8. osztály, valamint
középiskolába készülőknek

Érdekes matematikai feladatok

Matematikai fogalmak, tételek

A logika alapjai

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 312-988, 312-578
MOZAIK Könyvesboltok:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 11-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VEGH KÖNYV

A matematika elmélete és tantárgypedagógiája
(Dr. Török Tamás)

Variációk egy témára
(Katona János)

Tippek, trükkök, ötletek
(Csordás Mihály – Nagy Tibor)

Pályázat

Feladatrovat tanároknak

Hírek versenyekről

IV. ÉVFOLYAM 1996 2

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Magyar Csaba

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 490 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

A matematika elmélete és tantárgypedagógiája
Dr. Török Tamás, Esztergom

Variációk egy témára
Katona János, Eger

Válaszlevél a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztályának (Hiteles levélmásolat)
Tolnai Gyuláné, Miskolc

Tippek, trükkök, ötletek
Csordás Mihály - Nagy Tibor, Kecskemét

Pályázat 1996
Válogatás a beérkezett feladatokból

Hírek versenyekről

A matematika feladatmegoldó pontverseny II. fordulójának megoldása

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

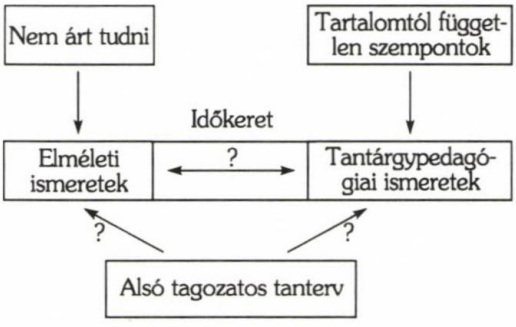
Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Dr. Török Tamás

A matematika elmélete és tantárgypedagógiája[1]

Amikor arról gondolkodunk, hogy mi legyen az a tartalom, ismeretrendszer, amit a főiskolai matematikaoktatás a leendő pedagógusok felkészítésében felvállalhat, vagy C. Neményi Eszter kifejezésével élve „Mire képezzük hallgatóinkat?" kérdésre keresünk választ, akkor két alapvető szempontot mindenképpen figyelembe kell vennünk. Az egyik a mindenkori alsó tagozatos tanterv, a másik pedig a rendelkezésre álló időkeret (a tanítóképző főiskolákon átlagosan 200 óra, a hallgatók gyakorlati képzését nem számítva).



Ha az elméleti ismeretek körét a „nem árt tudni" homályos szempontja alapján akarjuk meghatározni, akkor ilyen alapon bármilyen matematikai ismeretet közvetíthetnénk: a komplex számoktól az axiomatikus geometriáig, a nevezetes eloszlásfüggvényektől az integrálszámításig.

Hasonló a helyzet a tantárgypedagógiai ismeretek meghatározásakor, a konkrét tartalomtól független szempontok érvényesítésével kapcsolatban. Az alsó tagozatos tanterv figyelembe veszi a gyerekek életkori sajátosságait a tartalmak és a követelmények vonatkozásában egyaránt. Ha felvállalnánk olyan általános pedagógiai és pszichológiai ismeretközvetítő szerepet, ami nem az egyes konkrét tartalmaknál, témacsoportoknál, feladatoknál jelenik meg, akkor azt megint csak valaminek az elhagyása vagy elnagyolása árán valósíthatnánk meg.

Természetesen nem képezi vita tárgyát, hogy egy leendő pedagógusnak a szaktárgyi felkészültség mellett általános ismeretelméleti, fejlődéslélektani és pedagógiai felkészültséggel is rendelkeznie kell. Ezeket viszont a hallgatóknak – véleményem szerint – nem a matematikaórákon kell megszerezniük. Ott csak ezen ismeretek, módszerek konkrét alkalmazásáról, helyes megválasztásáról lehet szó.

További fontos szempontként merülhet fel, hogy melyek azok az ismeretek, amelyek egy leendő pedagógus számára fixpontokat, egy vázat jelenthetnek, és melyek azok, amelyekről beszélni ugyan lehet, de felhasználásukra sohasem kerül sor vagy elsajátításuk, megszerzésük igazi színtere csak a tapasztalás lehet.

Főiskolánk matematika tanszékének néhány éves törekvése, hogy a matematika elméletét és tantárgypedagógiáját nem különválasztva, hanem szerves egységben próbálja tanítani.

A kapcsolat – sok esetben nem könnyű – megteremtése alapvetően kétirányú feladatot jelent. Egyrészt olyan (és csak olyan) elméleti ismeretek közvetítését a hallgatók felé, amelyekre „igazolhatóan" szükség van az alsó tagozat témaköreinek tanításához, feladatainak megoldásához, illetve a tanulók munkájának irányításához, szervezéséhez.

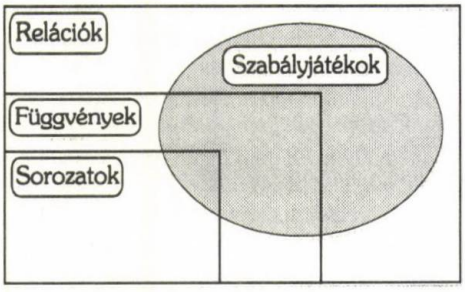
És fordítva: az alsó tagozat témacsoportjai, fogalmai, feladatai, módszerei meghatározzák a szükséges elméleti és tantárgypedagógiai háttér „terjedelmét" és „mélységét", a fölöslegesnek látszó, máskor viszont hiányzó elméleti és módszertani ismeretek körét.

[1] Jelen cikk a Bajai Tudományos Konferencián (1994. november) elhangzott azonos című előadás kibővítése.

Egy témacsoport elméleti hátterének és tantárgypedagógiájának „együtt-tanítása" értelmezésünk szerint azt jelenti, hogy azok nem különülnek el egymástól sem időben, sem pedig közös tartalmukban.

Terjedelmi korlátok miatt nincs lehetőségem arra, hogy az említett együtt-tanítás minden olyan területét és mikéntjét bemutathassam, amelyekkel tanszékünkön próbálkozunk. Egy témakört emelnék most ki, a szabályjátékokat.

Tudjuk, hogy a szabályjátékok témaköre nem önálló témacsoportja az elemi szint (1-6. osztályok) tananyagának. Inkább csak egy (nagyon fontos) eszköz a gyerekek függvényszerű gondolkodásának kialakításához. Beleágyazódik a relációk – függvények – sorozatok témacsoportba, mindegyikkel van közös része.



Ahhoz, hogy akár elméleti, akár módszertani szempontból ezt az anyagrészt feldolgozhassuk, először is szükségesnek látszik az alsó tagozatban előforduló szabályjátékoknak egy rendszerezése.

A szabályjátékok egy lehetséges rendszerezése

Megjelenési forma szerint:
gép
táblázat
sorozat
⋮

Típusa szerint:
dolog - dolog
dolog - szám
szám - dolog
szám - szám

A bemenetek száma szerint:
1
2
⋮

Működési elv szerint:
műveletet (műveleteket) végez
művelet típusa: +, -, *, /
műveletek száma: **1, 2,** ...
geometriai transzformációt hajt végre
hozzárendelést létesít

A feladat jellege szerint:
folytatás, hiányzó adatok pótlása
a szabály meghatározása

Mi az osztályonkénti tartalom, követelmény? ⇐ tanterv

Az utóbbi szempont talán a legfontosabb. Annak megmutatása, hogy az 1-4. osztályokban a gyerekek függvényfogalma hogyan érlelődik, milyen fejlődési fokozatokon megy át a változás megfigyelésétől kezdve az adatok lejegyzésén, grafikus megjelenítésén, az adott szabály szerinti folytatáson keresztül, egészen az összefüggések tudatos feltárásáig.

Ezt a célt elérhetjük például egy jól összeállított, az 1-4. osztályokon végigvonuló feladatsorozattal, összekapcsolva azt a fenti rendszerezés egyéb szempontjaival.

Ebben a rendszerezésben vastagon szedett betűvel emeltem ki az elemi szint matematikatanításában leggyakrabban előforduló szabályjátékokat. A tantervi előírások szerint 4. osztálytól kezdve már egyre nagyobb hangsúlyt kap az összefüggések felfedezése, a szabály megtalálása, megfogalmazása, és nyitott mondattal vagy nyíllal való lejegyzése.

A főiskolai képzésben nincs lehetőség arra, hogy a szabálykeresés minden lehetséges módját bemutassuk. Ez különben (már elviekben) is lehetetlen a megoldások végtelen száma miatt. De legalább két alapvető módszert mindenképpen célszerű elsajátítania hallgatóinknak, ismernie egy gyakorló pedagógusnak: az egy- és több-bemenetű (általában lineáris és kétműveletes) gépek működési elvének keresését. Ez jelentheti egyúttal a szakmai biztonságot, az elméleti háttérismeretek körét a szám-szám típusú szabályjátékok tanításánál.

Egy bevezető példa: Mi a kapcsolat x és y között?

x	6	15	24
y	7	10	13

Nem valószínű, hogy próbálgatással rövid időn belül megtaláljuk az összefüggést. Akkor viszont a gyerekek is hiába várják a segítséget. A feladat látszólagos bonyolultsága ellenére rendkívül egyszerű. Mielőtt megoldanánk, nézzük a problémát általában!

I. Egyváltozós szabályjátékok (egybemenetű gépek):

x	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	?
y	y_1	y_2	...	y_n	?	y_{n+1}

a) Lineáris eset: Keresendő olyan $y = ax + b$ alakú elsőfokú polinom (ahol a jelenti azt a számot, azt amivel a gép szoroz, b pedig, amit hozzáad vagy elvesz), amire:

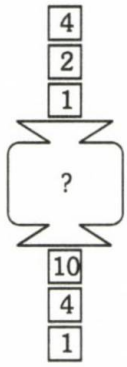
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ b = y_1 - ax_1.$$
$$\vdots$$
$$y_n = ax_n + b$$

Ha van lineáris szabály, akkor az a meghatározása nagyon egyszerű: **a kimenetek különbségét kell osztani a hozzájuk tartozó bemenetek különbségével**. És ha már ismerjük, hogy a gép mennyivel szoroz, akkor könnyen megtudhatjuk, hogy ehhez még mennyit ad hozzá.

A bevezető példában az első két kimenet és bemenet különbségének hányadosa $\frac{1}{3}$, vagyis a gép 3-mal oszt. A bemenetek harmadánál a kimenetek 5-tel nagyobbak. A lehetséges szabály tehát: $y = \frac{x}{3} + 5$. (Ez a szabály kielégíti a harmadik értékpárt is.)

Órarészlet

Feladat: Mit csinál a gép? Mi a kimenet, ha a bemenet 5, és mi a bemenet, ha a kimenet 19? Szemléltetés papírmodellel:



A feladat táblázatos megjelenítése:

□	1	2	4	5	?
△	1	4	10	?	19

Tanítói megoldás: Az általános levezetés alapján a gép a bemeneteket $\frac{4-1}{2-1} = 3$-mal szorozza, és ezekből 2-t levon, a szabály tehát: $\triangle = 3 \cdot \square - 2$ vagy más alakban megadva: $3 \cdot \square = \triangle + 2$.

A feladat órai megoldása:

a) Várható tanulói észrevételek:
- Ha a △-höz kettőt adunk, akkor a □ háromszorosát kapjuk.
- Ha a □-et megháromszorozzuk, akkor a △-nél kettővel nagyobb számot kapunk.

b) Esetleges (fokozatos) tanítói segítség:
- A gép két műveletet is végez.
- Valamennyivel szoroz és valamennyit elvesz.
- Egészítsük ki a táblázatot egy(-egy) segédsorral! Adjunk a △-értékekhez kettőt és hasonlítsuk össze a □-értékekkel! Háromszorozzuk meg a □-értékeket és hasonlítsuk össze a △-értékekkel! (A kétműveletes szabály kitalálását így egy művelet meghatározására csökkentettük.)

□·3					
□	1	2	4	5	?
△	1	4	10	?	19
△+2					

c) A szabály szóbeli közlése és írásbeli lejegyzése (a tanítói megoldással megegyezően).

d) Ellenőrzés: $1 = 3 \cdot 1 - 2$, $4 = 3 \cdot 2 - 2$, $10 = 3 \cdot 4 - 2$.

e) A hiányzó adatok meghatározása: a $\triangle = 3 \cdot 5 - 2$ és a $19 = 3 \cdot \square - 2$ nyitott mondatok megoldásával.

f) Házi feladat: A szemléltetőeszköz (papírmodell) megfordításával kapott új gép szabályának kitalálása.

Feladat az olvasónak

Több (2 vagy 3)-bemenetű gép tervezése és kivitelezése papírmodellel.

A bemenő adatpárok (adathármasok) száma legalább 3, a kimenet-bemenet közötti összefüggés pedig lineáris legyen!

Ha nem találunk lineáris szabályt (az ellenőrzésnél derül ki), akkor...

b) Másodfokú eset: Keresendő olyan $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom, amire:

$$y_i = ax_i^2 + bx_i + c \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Például:

x	1	2	3	5
y	0	2	6	20

Az első két adatpár alapján lineáris szabályt keresve az $y = 2x - 2$ összefüggést kapjuk, de ennek nem tesz eleget a 3. és a 4. értékpár egyike sem. Másodfokú szabályt keresve, a

$$0 = a + b + c$$
$$2 = 4a + 2b + c$$
$$6 = 9a + 3b + c$$

egyenletrendszert megoldva $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ adódik. Vagyis a szabály: $y = x^2 - x = x(x - 1)$, amely már mind a négy értékpárt kielégíti.

A (fokozatos) tanítói segítség lehet:

- A gép csak egy műveletet végez a bemenettel.
- A bemenetek valamelyik (kisebb vagy nagyobb) számszomszédjait is felhasználja.
- Egészítsük ki a táblázatot az $(x - 1)$ pótsor felvételével!

$x-1$	0	1	2	4
x	1	2	3	5
y	0	2	6	20

- Hogyan kapható meg y az x és az $(x - 1)$ segítségével? Írjuk fel nyitott mondattal! (A tanítói megoldással megegyezően.)
- Fogalmazzuk meg szavakkal is a gép működési elvét! (A kimenetet megkapjuk, ha a bemenetet a kisebbik számszomszédjával szorozzuk.)

Előfordulhat, hogy a másodfokú szabálykeresés is eredménytelen (alsó tagozatban nem fordul elő), például az $y = x^3 + 1$ esetben.

c) Általános eset (kitekintés): n összetartozó értékpár esetén mindig van olyan, legfeljebb $(n - 1)$-edfokú polinom, ami a szabályjáték megoldását adja.

szabályjáték $\Rightarrow$ polinom $\Rightarrow$ egyenletrendszer

II. Többváltozós szabályjátékok (többbemenetű gépek):

Kétbemenetű gép:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n
z	z_1	z_2	...	z_n

Szabály keresendő: $z = ax + by + c$ alakban. A szabály megtalálása egy háromismeretlenes, lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti. Határozott, határozatlan és ellentmondó esetek lehetségesek attól függően, hogy a szabályjátéknak van-e ilyen alakú megoldása, és ha igen, akkor csak egy vagy végtelen sok.

Például:

x	1	3	9
y	1	2	10
z	1	4	8

Az $1 = a + b + c$, $4 = 3a + 2b + c$, $8 = 9a + 10b + c$ egyenletrendszert megoldva: $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$.

Vagyis a szabály: $z = 2x - y$.

szabályjáték $\Rightarrow$ egyenletrendszer

Megjegyzések:

- Ha a bemutatott nagyon egyszerű szabálykeresési módszerekkel egy tanító a főiskolai tanulmányai során megismerkedik, akkor ezek birtokában bátran javasolhatja majd olyan feladatok megoldását is, amelyeket a gyerekek az órán találnak ki, és a tanítóval együtt (az ő irányításával) oldanak meg. Nem csak „előregyártott", kidolgozott feladatok vihetők be egy tanítási órára.
  Ugyanakkor a hallgatók szempontjából a polinomok és egyenletrendszerek témáját közvetlen kapcsolatba hoztuk (és együtt rögzítettük) egy alsó tagozatos problémakör tárgyalásával.
- Természetesen az elméleti háttérismeretek tanításakor egyéb szempontokra is tekintettel kell lennünk. Például arra, hogy minden szabályjátéknak végtelen sok megoldása van, másrészt hogy nem merítettük ki a szabálykeresés összes módozatát. Vannak szorzó és osztó, sőt maradékosan osztó, számszomszédokat, legnagyobb közös osztót stb. meghatározó gépek is. De azt hiszem, ezek tárgyalása inkább a témakör tantárgypedagógiai feldolgozásához állnak közelebb, annál is inkább, mert egy szabályjáték-feladat kitűzése szoros összefüggésben van a gyerekek szám- és műveletfogalmával, egyéb témakörökhöz is kapcsolódó ismereteivel.
- A relációk – függvények – sorozatok témacsoport módszertani feldolgozásakor alapvetően a gyerekek függvényfogalmának kialakítása a cél. Ennek a tanítási folyamatnak a részletes bemutatása helyett egy eszközhasználattal egybekötheto játékos lehetőséget mutatnék módszertani ajánlásként.

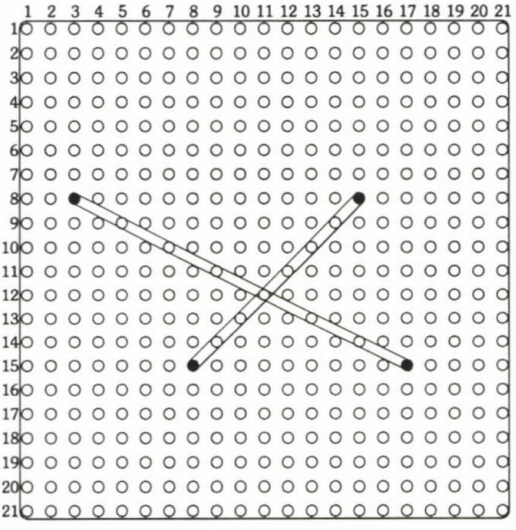
„Fogócska" a lyukas táblán

A tanító két papírcsíkra egy-egy kifejezést ír. Két önként jelentkező tanuló (pl. Móni és Zoltán) a kézbe vett papírcsíkkal, az osztállyal szemben leül. Ezekről a kifejezésekről a többiek nem tudhatnak.

Az osztály többi tanulója számokat mond. A tanító ezeket felírja a táblára a △ alá. Móni és Zoltán megnézi kártyáit, kiszámítják kifejezéseik értékét a mondott △-értékekre. Ezek is a táblára kerülnek a megfelelő helyekre. Táblakép:

	Móni	Zoltán	Eltérés
△	2△−13	23−△	
8	3	15	12
15	17	8	9

Közben a helyükön ülők a lyukas táblájukon is megjelenítik a számokat, mégpedig úgy, hogy szögeket szúrnak be annyiadik sorba amennyi a △, és annyiadik oszlopba, amennyi Móni és Zoltán értékei.



Feladat:

a) Milyen △-értékre fogja Móni és Zoltán ugyanazt a számot mondani?
Ha ezt megtudjuk, akkor „elfogtuk" őket.

b) Milyen kifejezés van a kártyákon?

Didaktikai megjegyzések:

- A feladatban tulajdonképpen három szabály meghatározása van elrejtve.
- A játék természetesen lyukas tábla nélkül is lefolytatható.
- A lyukas táblán való szemléltetés segítségével a feladat a) részének megoldása (△ = 12) leolvasható. Szemléltetés másik előnye az, hogy láthatóvá válik, hogy Móni és Zoltán egyeneseken mozognak, ahol a kifejezések határozzák meg azok elhelyezkedését, egymáshoz való viszonyát.

- Célszerű olyan kifejezéseket konstruálni, hogy lehetőleg sok pontjuk essen a lyukas táblára.

Egy kérdés:

Vajon a hallgatók felkészítésében, leendő munkájuk szempontjából mi a hasznosabb: polinomok racionális gyökkeresési eljárásának megmutatása és egzakt bizonyítása vagy például az imént bemutatott játék elméleti és módszertani megbeszélése? Mindkettőre ugyanis biztos hogy nem jut idő.

Általános megjegyzések:

- Ha a szükségesnek vélt elméleti háttérismeretek jogosságát nem támasztjuk alá alsó tagozatos alkalmazásokkal, nem „vetítjük" le az alsó tagozatos feladatok, fogalmak, módszerek szintjére, akkor ezek az ismeretek előbb-utóbb elvesznek, feledésbe merülnek. A hallgató számára pedig egy olyan „nyűgöt" jelentenek, amelyekből valamikor vizsgát kell tennie.
- A matematika alsó tagozatos tanítási gyakorlatában felhasználható elméleti ismeretek köre és azok felhasználásának mikéntje nem előre adott, feltárásuk komoly kutatómunkát igényel. Mindenesetre sokat segíthetnek azoknak a témaköröknek a tantárgypedagógiai feldolgozásánál, amelyeknél ezt a kapcsolatot már sikerült megtalálnunk.
- Pólya György A problémamegoldás iskolája II. című könyvében az elmélet és a módszertan viszonyáról azt írja (nem pontos idézet), hogy a matematika tanszékek olyan húst kínálnak, mint a cipőtalp, a módszertani iskolák pedig olyan levest, amelyből sokszor kimarad a hús. A matematika elméletének és tantárgypedagógiájának együtt-tanítása talán még részletes kidolgozásra váró lehetőség, ezen nem kívánatos helyzet feloldására.

Irodalom

[1] C. Neményi Eszter: Gondolatok egy alsó tagozatos játék kapcsán A matematika tanítása. I. évf., 3. szám, 1993. május

[2] Pólya György: A problémamegoldás iskolája II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[3] Török Tamás: Gondolatok a „Fogócskáról" A matematika tanítása. II. évf., 2. szám, 1994. március

MEGHÍVÓ

A Budapesti Tanítóképző Főiskola és a Bólyai János MatematikaiTársulat Oktatási Szakosztálya meghívja Önt

A MATEMATIKA TANÁRKLUB 1996. ÉVI KÖVETKEZŐ RENDEZVÉNYÉRE

Időpontja: 1996. Március 23. (szombat) 11.00 – 14.00

Helye: Budapesti Tanítóképző Főiskola (Bp. XII. Kiss János altb. u. 40. I. em. 123.)

A Déli pályaudvartól az 59-es villamossal közelíthető meg, Kiss János altb. utcánál (Önkormányzat) kell leszállni.

PROGRAM

11.00 – 11.30 Az Élet és Tudomány „A gondolkodás iskolája" versenyének eredményhirdetése
11.30 – 12.30 Dr. Reiman István rovatvezető elemzi a feladatokat és a verseny tapasztalatait
12.30 – 13.00 EBÉDSZÜNET
13.00 – 14.00 A MAPLE rendszer használata a matematika oktatásában
Előadó: Dr. Maróti György

Szeretettel várjuk, érdeklődésére, hozzászólására számítunk!

Katona János

Variációk egy témára

Ebben a cikkben megismerhetjük a Pitagorasz-tétel (körülbelül) 8-féle bizonyítását, megfordítását és három általánosítását. Azért körülbelül 8-féle, mert a matematikában nem definiált, hogy mit tekinthetünk különböző bizonyításnak, és mit nem. Megjegyzendő, hogy az alább leírtak nem teljes bizonyítások, terjedelmi okokból inkább csak a bizonyítások vázlatai. Nekem komoly dilemmát okozott az, hogy melyiket tanítsam órán, melyiket mutassam csak szakkörön, illetve melyiket hagyjam ki.

1. bizonyítás: Egy tetszőleges háromszög oldalait irányítsuk az 1. ábra szerint. A bejelölt három vektorra nyilván igaz a

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

összefüggés. Mindkét oldalt négyzetre emelve

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzata $a \cdot b \cdot \cos\gamma$, ahol γ a két vektor által közrezárt szög. Így

$$cc \quad \cos 0° = aa \cos 0° + bb \cos 0° - 2ab \cos\gamma.$$

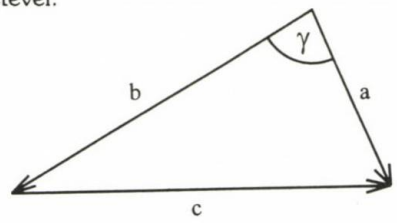
Mivel $\cos 0° = 1$, egyenletünk

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$

alakot ölt. Ez az összefüggés – a koszinusztétel – bármely háromszögre igaz. Speciálisan derékszögű háromszögre, $\gamma = 90°$ esetén $\cos\gamma = 0$, így jutunk a

$$c^2 = b^2 + a^2$$

összefüggéshez, amit Pitagoraszról neveztek el. Úgy szoktuk megfogalmazni, hogy bármely derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével. Geometriai szemlélettel: bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területösszege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.



1. ábra

1. általánosítás: Joggal mondhatja bárki, hogy ágyúval lőttünk verébre, hiszen egy elemi geometriai tétel bizonyításához vektorokat, vektorok skaláris szorzatát, szögfüggvényt használtunk. Az viszont fontos, hogy a koszinusztétel a Pitagorasz-tétel egyfajta általánosítása. Másik két általánosítást a 8. pont után fogalmazunk meg és bizonyítunk be.

2. bizonyítás: Húzzuk be a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságát, az átfogó szeleteit jelöljük p-vel és q-val, a magasság talppontját T-vel! (2.ábra) A TCB háromszög hasonló a CAB háromszöghöz, mert mindkettőnek van egy derékszöge, és a B-nél levő szögük közös. A hasonlóság miatt a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{a}{c} = \frac{p}{a}.$$

Ebből

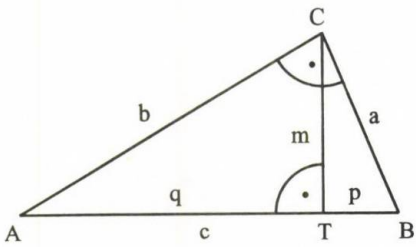
$$a^2 = pc.$$

(Mivel az a, p és c pozitív, gyökvonással a befogótételhez juthatunk.) Teljesen hasonlóan

$$b^2 = qc.$$

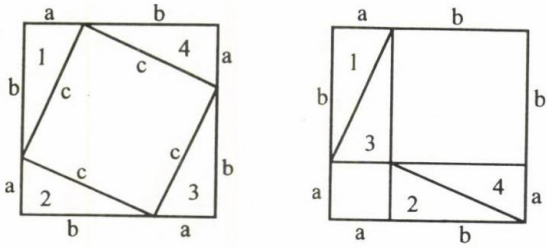
A két egyenletet összeadva:

$$a^2 + b^2 = pc + qc$$
$$a^2 + b^2 = (p + q)c$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



2. ábra

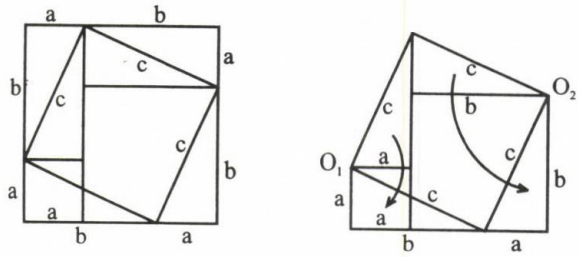
3. bizonyítás: Az előzőekben sok számolással bizonyítottuk azt, hogy két négyzet területének összege egyenlő egy harmadik négyzet területével. Természetesebbnek tűnik ezt átdarabolással bizonyítani. A 3.*a)* és *b)* ábrán rajzoltunk két, $a+b$ oldalú négyzetet, és különbözőképpen daraboltunk. A megszámozott a és b befogójú derékszögű háromszögek egybevágóak (és egyállásúak). Könnyen látható, hogy a 3.*a)* ábra „közepén" egy *c* oldalú négyzet keletkezett (minden oldala és szöge egyenlő), ennek területe viszont egyenlő a 3.*b)* ábra *a* és *b* oldalú négyzete területének összegével.



a) *b)*

3. ábra

4. bizonyítás: A 4.*a)* ábrán gyakorlatilag a 3. ábrának megfelelő bizonyítás olvasható le, csak ez nehezebb, mert itt a két $a+b$ oldalú négyzet egymásra van rajzolva. Érdekesebb a 4.*b)* ábra, amit a 4.*a)*-ból kaptunk a két felső *a* és *b* befogójú derékszögű háromszög elhagyásával. Így egy másik átdarabolást olvashatunk le: az O_1 és O_2 körül tudjuk elforgatni az *a* és *b* befogójú derékszögű háromszögeket 90 °-kal.



a) *b)*

4. ábra

5. bizonyítás: Az 5.*a)* ábrán szintén egy $a+b$ oldalú négyzetet daraboltunk fel. Itt ugyan nem keletkezett sem *a* oldalú, sem *b* oldalú négyzet, de egy kis számolással így is célhoz érhetünk. Az $a+b$ oldalú négyzet területe egyenlő a *c* oldalú négyzet területe plusz a körülötte levő, négy *a* és *b* befogójú derékszögű háromszög területével:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2}$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$

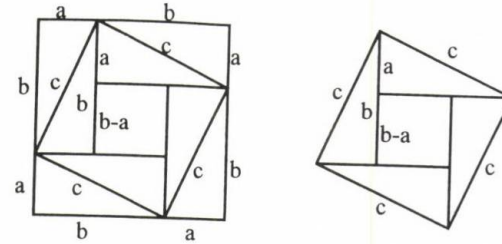
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Az 5.*b)* ábra az 5.*a)* ábra közepének felel meg. Most *a* egy *c* oldalú négyzetet daraboltunk és felírtuk a területét kétféleképpen:

$$c^2 = (b-a)^2 + 4\frac{ab}{2}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab + 4\frac{ab}{2}$$

$$c^2 = b^2 + a^2.$$

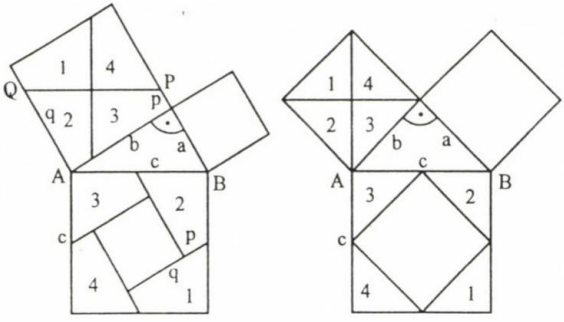


a) *b)*

5. ábra

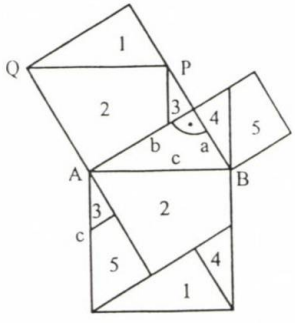
6. bizonyítás: A 6.*a)* ábrán felrajzoltuk a Pitagorasz-tétel „szó szerint": a befogókra emelt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra emelt négyzet területével. Ennek

belátásához a nagyobbik befogóra emelt négyzet középpontján át párhuzamost húztunk az átfogóval, majd egy erre merőlegest is. A keletkezett négy egybevágó négyszögnek van két derékszöge, a másik két szöge nyilván kiegészítő szög. Az *ABPQ* paralelogrammából látható, hogy a $QP = AB = c$, így a négy megszámozott négyszög két szomszédos egyenlő oldala $c/2$. Ha tehát a négyszögeket elcsúsztatjuk az ábra szerint a c oldalú négyzet sarkaiba, akkor a fentiek miatt illeszkednek egymáshoz. A négy elcsúsztatott négyszög által közrefogott négyszög nyilvánvalóan négyzet, oldalhossza $q - p$, ami az *ABPQ* paralelogrammából láthatóan éppen a. Ha a derékszögű háromszög egyenlő szárú, akkor a rajz és a bizonyítás is egyszerűbb (6.b ábra).



a) *b)*

6. ábra



7. ábra

7. bizonyítás: A 7. ábráról szintén a „szó szerint" felrajzolt tétel bizonyítását olvashatjuk le. Maga az ábra rendkívül frappáns, a számmal jelölt sokszögek egybevágóak és egyállásúak. Igaz ezt bebizonyítani kicsit hosszadalmas. Nem is írjuk le, csak néhány ötletet adunk. Az egyessel jelölt háromszögek egybevágók az eredeti háromszöggel. Itt is megtalálható a 6. ábra *ABPQ* paralelogrammája.

8. bizonyítás: A 8. ábrán a *CP* szakasz a derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága, aminek a meghosszabbítása a c oldalú négyzetet a Q pontban metszi.

$$T_{ACDE} = b^2 = 2\frac{bb}{2} = 2T_{AEB},$$

mert az *AEB* háromszög egyik oldala és az ehhez tartozó magasság is b. Az *AEB* háromszög A pont körüli 90°-os elforgatottja az *ACF* háromszög.

$$T_{ACDE} = b^2 = 2\frac{bb}{2} = 2T_{AEB} =$$

$$= 2T_{ACF} = 2\frac{cd}{2} = cd = T_{AFQP}.$$

Kaptuk tehát, hogy

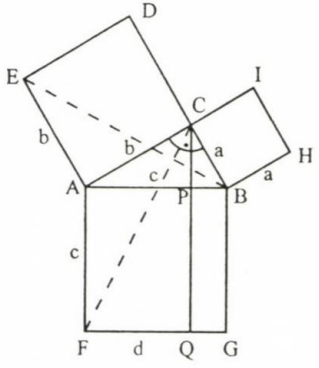
$$b^2 = T_{AFQP}.$$

Teljesen hasonlóan

$$a^2 = T_{BPQG}.$$

Ez utóbbi két egyenletet összeadva

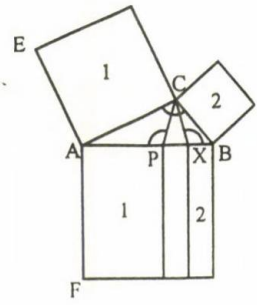
$$a^2 + b^2 = T_{BPQG} + T_{APQF} = T_{ABGF} = c^2.$$



8. ábra

2. általánosítás: (9. ábra) Egy tetszőleges háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk, majd a C csúcsból úgy húztuk be a *CP* és *CX* szakaszokat, hogy mindhárom bejelölt

szög egyenlő legyen. Ezután merőlegest állítottunk az AB szakaszra a P és X pontból. Állítjuk, hogy az azonos számmal jelölt területek egyenlők. Az ábra azt az esetet mutatja, amikor C-nél tompaszög van. Hegyesszög esetén az AB-re rajzolt négyzetben az 1-es és 2-es területek részben fedik egymást. Derékszögű háromszög esetén a P és az X egybeesik. Ekkor a 8. ábrát (és a Pitagorasz-tételt) kapjuk vissza.



9. ábra

Bizonyítás: A 9. ábra a 8. ábra általánosításának tekinthető, de az ott használt ötlet most nem válik be, mert az AEB háromszögnek az AC most nem magassága. Használjuk inkább a 2. bizonyítás hasonló háromszögeit! Itt az APC háromszög hasonló az ACB háromszöghöz, mert a megjelölt szögek egyenlők, valamint az A csúcsnál levő szögük közös. A megfelelő oldalak aránya:

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Ebből

$$AP \cdot AB = AC^2.$$

Kihasználva, hogy $AB = AF$ és $AC = AE$, kapjuk, hogy

$$AP \cdot AF = AC \cdot AE,$$

ami éppen az egyessel jelölt területek egyenlőségét bizonyítja.

3. általánosítás: Ha egy tetszőleges derékszögű háromszög oldalaira nem négyzeteket, hanem bármilyen hasonló alakzatokat rajzolunk, akkor is igaz, hogy a befogókra rajzolt alakzatok területösszege egyenlő az átfogóra rajzolt alakzat területével. Így pl. bármelyik szabályos sokszög, félkör is megfelelő a négyzet helyett, mert két félkör mindig hasonló, ill. bármely két azonos oldalszámú szabályos sokszög is mindig hasonló. A 10. ábra félköröket és hasonló „fenyőfákat" ábrázol. Ha az $a^2 + b^2 = c^2$ már bizonyított egyenlőséget megszorozzuk $\frac{\pi}{8}$-cal, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi}{2} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi}{2} = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi}{2},$$

ami félkörökre bizonyítja állításunkat. Általánosan:

Bizonyítás: Használjuk fel azt a tételt, ami szerint hasonló alakzatok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzetével egyenlő:

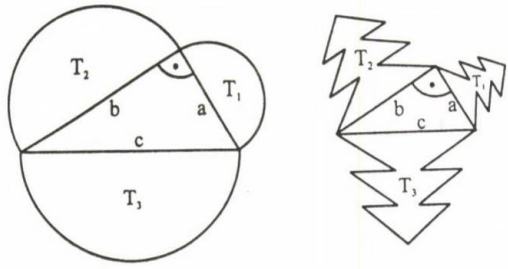
$$\frac{T_1}{T_3} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad \text{és} \quad \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Összeadva:

$$\frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$T_1 + T_2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} T_3.$$

A már bizonyított Pitagorasz-tétel szerint a jobb oldalon szereplő tört értéke éppen 1. Így $T_1 + T_2 = T_3$, ami az állításunkat bizonyítja. Vegyük észre, hogy az előző két általánosítás belátásánál nem volt szükségünk a Pitagorasz-tételre, most viszont erősen kihasználtuk azt. Ez igaz a most következő állítás bizonyítására is.



a) *b)*

10. ábra

Megfordítás: Nem lenne teljes a cikk a Pitagorasz-tétel megfordításának megemlítése nélkül. Ez kimondja, hogy ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor ezzel a harmadik oldallal szemközti szög derékszög.

A megfordítást ma is igen gyakran használják. Ha pl. kitűzik egy épület körvonalait, akkor kimérnek a sarkától kétfelé – mondjuk – 3 és 4 métert. Ha ezeknek a szakaszoknak a végpontjai éppen 5 méterre vannak egymástól, akkor a Pitagorasz-tétel megfordítása értelmében a sarok derékszögű.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy háromszög oldalait alkalmas módon jelölve igaz rá az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés. Bizonyítandó, hogy a c-vel szemben derékszög van. Először vegyünk egy a és b befogójú derékszögű háromszöget. Ennek átfogóját jelöljük d-vel. A Pitagorasz-tétel miatt $a^2 + b^2 = d^2$. Ezt az előző összefüggéssel összehasonlítva kapjuk hogy $c^2 = d^2$. Mivel c és d pozitív, $c = d$. Ebből következik, hogy a két háromszög egybevágó, hiszen mindhárom oldaluk egyenlő. Ekkor viszont megfelelő szögeik is páronként megegyeznek, ami állításunkat bizonyítja.

Tolnai Gyuláné

Válaszlevél a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztályának[2]

(Hiteles levélmásolat)

„Az emberi nemnek hivatása nem rontás, pusztítás, megsemmisítés, hanem hogy munkáljon, alkosson, teremtsen."

Széchenyi István

Tisztelt Oktatási Szakosztály!

Különös levélírás főszereplője lettem, mert olyan levélre, „elemzésre" kell válaszolnom, amit nem is nekem küldtek. A vádirat azonban engem illet, mivel a heurisztikus programozású alternatívának, könyveinek, valamint minden eszközének alkotó-szerkesztője, létrehozója én vagyok, így nekem kell megválaszolnom az ugyan „elemzésnek" nevezett, de tartalmában *személyiségem lejáratásával kapcsolatos véleményükre.*

Világosan kitűnik véleményükből, hogy olyan területeket emeltek ki negatívumként, amelyek segítségével bizonyíthatják, *miszerint munkám nem felel meg a tankönyvvé nyilvánítás kritériumainak.* Önök azonban mélységes gyűlöletükben (aminek az okát nem értem) megfeledkeztek arról, hogy ez a jelenleg minisztériumi engedéllyel még forgalmazható segédkönyv (illetve segédkönyvek) a már több éve megjelent tankönyvcsaládjaimnak szerves része, és így a mindenkori ismeretanyaga folyamatláncolatot alkot. Az előző évben történt vizsgálatok következtében egyetlen könyvben, munkafüzetben sem kellett javítanom semmit. Minden területen pozitívumként emelték ki, hogy NAT szelleméhez igazodva, szakmai-tudományos szempontokat figyelembe véve harmonikusan integrálja a rokon tudományokat.

Tankönyvcsaládjaim minden területen eleget tettek és tesznek nemcsak a tartalmi, pedagógiai, didaktikai, pszichológiai, nyelvi és kommunikációs szempontoknak, hanem minden olvasáshigiéniai, esztétikai és műszaki kivitelezési szempontnak is. A „Legszebb magyar tankönyvcsalád" díjával is rendelkezem.

[2] A szakosztály elemzése előző, 1996. Januári számunkban jelent meg.

A 6 pontban megfogalmazott „elemzésükben" a tankönyvvé nyilvánítás minden olyan követelményét említették negatívumként, amelynek következtében azonnal be kellene vonni minden tankönyvcsaládomat, és közel 100 000 gyermeknek (országhatáron belül és kívül) abba kellene hagynia a heurisztikus programozású alternatívával való tanulást. Bizonyítékul szolgál, hogy Önök az alternatívámhoz kifejlesztett irányító központomat, „programfalamat" (amit közel 20 évig készítettem), amely behálózza vezérlő kódvonzatával tankönyvcsaládjaim teljes ismeretanyagát, *a valóságtól teljesen eltávolodó, a gyermekek gondolkodását megnehezítő és veszélyeztető „művi" világnak nevezik.*

A szakmai-tudományos (tartalmi) szempontokat figyelembe véve az Önök által felsorolt borzalmak alapján le kellene állítania valós érveléseik esetében a program idegen nyelvű adaptációit is, hiszen *tudott dolog, hogy programom minden nyelvre adaptálható* (lásd a román szeptember 26-i és az angol változat november 17-i televíziós bemutatását). Még a jelenlegi szlovák kormány is aranyéremmel tüntette ki azt a két volt nyitrai főiskolást, akik elkészítették a program szlovák adaptációját.

Az eddigi tankönyvbírálatok mind előnyként emelték ki azokat a korszerű feldolgozási eljárásokat, amelyeket Önök – engem szinte funkcionális analfabéta szintre lesülylyesztve – hátrányként emelnek ki. Országos megítélés szempontjából adekvátnak tartják a NAT-tal, bizonyítja ezt az is, hogy mindennap érkezik felkérés hozzám az ország területeiről nevelési értekezletek megtartására. Bizonyítékként tudom felmutatni azt a sok-sok tudományos munkát igazoló dokumentumsorozatot, amely tisztán igazolja, hogy egy teljes fél évszázad alatt olyan komplex programon dolgoztam, ahol már nem tantárgyakban, hanem valóban műveltségi területekben gondolkodtam.

Tudományos szakemberek előtt mindenkor vállalom a programom ellen irányuló támadások kivédését, annál is inkább, hogy még soha nem sértették meg ennyire emberi jogaimat és méltóságomat.

Az elemzési pontok alapján konkrétan reagálok a leírt testületi véleményükre.

1. E pont első bekezdésének minden mondata valótlanságot állít. *Én egy teljes alternatívát dolgoztam ki egy általam létrehozott programfal vezérlésével, amit nem én neveztem el „heurisztikus programozás*nak". Ezt az elnevezést hosszú évtizedek alatt megnyert pályázatok sokasága, *15 megyei és ugyanennyi országosan elnyert újítási véleményezés, összegzés, továbbá a Magyar Tudományos Akadémia és a Soros Alapítvány oktatási pályázatának elnyerése, többéves tudományos hatásvizsgálat dr. Salamon Jenő, az ELTE tanárának vezetésével, valamint a mindenkori Művelődési és Közoktatási Minisztérium 14 magas fokú kitüntetése – amelyek között szerepel az Apáczai Csere János-díj, valamint a Magyar Köztársasági Érdemrend Kiskeresztje – is igazol.* Ez utóbbi kísérő okiratában a következő szöveg szerepel: *„Pedagógusi pályája és új tanítási módszere elismeréseként".* Ehhez a ponthoz hozzátartozik még az az állításuk is, hogy előbb az anyanyelvi tárgyakat, később a környezetismeretet, végül a matematikatanítást kapcsoltam programomhoz. Ez az állítás is téves, amit a hivatalos dokumentumok és a megjelent tankönyveim is igazolnak. *Programom első perctől kezdve a tantárgyak teljes komplexitására épült.* A legutolsó mondat is téves, a segédkönyveket nem én adtam ki, és nem én forgalmazom.

Az elemzésben leírt határozott véleményalkotásukkal kapcsolatban kijelentem, hogy a megfogalmazásukban foglaltak „rágalmak" csupán. *Bizonyítja ezt az a tény, hogy a program tartalma, módszertani eljárása, hatásmechanizmusa minden területen az ellenkezőjét fejezi ki az Önök által felsoroltaknak.* Az azonban igaz, hogy az általam vállalt és szolgált célok nem egyeznek az Önökével. Ugyanis én a teljes tankönyvcsaládsorozatommal a környezetvédelmi nevelés problémáihoz és a mögöttük rejlő ökológiai okokhoz is kapcsolom a matematikatanításomat. Ez sajnos még részletesen sem épült be az általános magyar nevelési-oktatási feladatok

folyamatába. *Én közel fél évszázad alatt megteremtettem, megszerveztem és működtettem a heurisztikus programozású alternatíva sajátos viszonyaira épülő környezeti nevelési és oktatási struktúrámat.* Éppen ezért nem a matematikatanítástól és a NAT-tól idegen, hanem az Önök matematikai állásfoglalásaitól.

Megdöbbenve olvastam, hogy eltérek a NAT-ban megfogalmazott felfogásoktól. Úgy érzem, hogy végleg bebizonyították, nem ismerik a programomat. *Éppen a NAT megfogalmazásában található, hogy legyen a tantárgyak között megfelelő együttműködés,* hogy a nevelés és az oktatás teljes rendszerében jelentőségének megfelelő helyet kapjon tudatos környezetvédő cselekvés és magatartás. Bárki kezébe veszi a könyveimet azonnal láthatja, milyen komolyan veszem ezeket a követelményeket.

2. E pontban kifogásolják a tartalmat, a címszavakat, illetve csak a látszatát emlegetik. A leírtakat azonban nem alapozzák meg, mivel *Önök közül a programfalas folyamatláncolatú didaktikai rendet, a teljes oktatócsomag eszköztárát senki sem ismeri, így nem tudhatják, mi a már rögzített ismeret és mi nem.* Ez a szó, hogy felszínes ismeretközlés, nem jellemző egyetlen tankönyvcsaládomra sem, hiszen én algoritmusrendszerben dolgozom, *ami megköveteli a szigorú lépésekben való tananyagrendezést.* Azt, hogy e téren pontos munkát végeztem bizonyítják a nyelvi adaptálhatóságok. E pontban írnak a geometria mögött húzódó tartalom türelmes kimunkálásának hiányáról és a gyakorlati mérések elhanyagolásáról. Önök azt sem tudják, hogy a mértékváltásokhoz is *külön munkafüzetet készítettem, amellyel már minden évfolyam, szinte a program megjelenése óta dolgozik.* Ez a dokumentum bizonyítja, hogy a méréseket egységekkel és mérőeszközökkel szinte százezres tételekben végzünk.

A 2. pontban végre negatív megállapítások nélkül közölnek tényeket. Azt írják, hogy egyedül a számtan témakört dolgozza ki teljes részletességgel a „Felfedező matematika". Ez is volt a célom mint alkotó-szerkesztőnek, de szerzőtársaimnak is.

3. A 3. pont érdekes ellentmondással kezdődik, mivel legfőképpen a feldolgozási módot kifogásolja megfeledkezve arról, hogy az első két pontban az utóbb említetteken kívül szinte mindent kifogásol. Tisztelettel közlöm Önökkel, hogy az a tudomány, amit én programomban végigviszek a logikai szintaxis segítségével, az általam létrehozott metanyelv kialakításával csak ilyen utakat képviselhet. *Érdekes dolog, hogy a külföldi, de különösen a nyugati országok szakemberei éppen könyveim feldolgozási módját tartják igen vonzónak a korszerű belső tartalom mellett.*

E pontban felsorolt szörnyűségek nemcsak alkotói, tankönyvírói munkásságomat tapossák a sárba, hanem 40 éves tanítói múltamat is semmisnek tekintik, pedig *az Apáczai Csere János-díj kísérőlevelén ez áll: „Az oktató-nevelő munkában kifejtett kimagasló tevékenységéért".* Azt, hogy nem vállalja a segédkönyvem a megértésen alapuló tanulást, szinte hihetetlenül hangzik. E véleményük ellenkezőjéről ír közel 150 újságcikk, 6 televíziós adás, sok rádió- és más egyéb nyilvános műsor. A programom legnagyobb erőssége az önálló ismeretszerzés, és amiket itt Önök felsorolnak, már bűnténynek is megfelelnek ellenem. Csak a matematika területére viszonyítva Zrínyi Ilona Matematikai Országos Versenyen rengeteg díjat szereztek a tolnais gyerekek. Szinte kigúnyolják a zenével és mozgásterápiával végzett gyakorlatsoraimat. *Ezek nem „mutogatások", ahogyan Önök írják, hanem matematikai ismeretek közvetítései.* Nem tudják a kézszorobános munka lényegét, nem ismerik gyakorlatsorait, és így olyan szörnyű vádakat írnak le, mint a mechanikus memorizálás. Szorobános felkészítő napjaimon több orvos is megjelent, és igen nagyra értékelte gyakorlatsoraim egészségvédő szerepét. Dr. Peja Márta a Miskolci Gyermekkórház világhírű orvoskandidátusa hivatalos levélben közölte velem, *hogy a programommal dolgozó gyermekek hamarabb gyógyulnak fel betegségeikből, mint más társaik.* Levelében külön kitér nevelési módszerem pozitívumaira.

4. E pontban a jelrendszerem kiépítésével foglalkoznak. A világ legtermészetesebb dolga, hogy *Önöknél ez is negatív terület, és merő-*

ben „művi" világ, amely meghamisítja a valóságot és a tanulók matematikával való ismerkedését. Itt is, mint idáig minden elemzési pontban, csak általánosságban mondanak véleményt. Nem tudom mit értenek azon, hogy összekeverem a jelölést a jelentéssel. Nem akarom Önöknek lexikálisan igazolni a kettő közötti különbséget, de ismételten közlöm, hogy *nem ismerik a heurisztikus programozás kódvonalát, szimbólumrendszerét,* mert akkor ilyen lehetetlenséget nem állítanának. Leírják a jelrendszerem lényegét, ami valóban így igaz. Arról viszont megfeledkeztek, hogy nálunk nem hívókép, hanem ábrajel, mert itt kódot (választott jel) jelent. Nem tudom miért nevezik az ábrajeleket rejtvényeknek, hiszen ez nálunk csak ismerethordozó, és olyan könnyen behelyettesíthető, ahogyan kiejtenek egy-egy szót a gyermekek.

E pontban azt is írják, hogy veszélyt jelent a felfedező matematikám a gyermekek életében. *Nem veszély a gyermekekre, hanem veszélyelhárító, megmentése a gyermekeknek a „matekfóbiától".*

A következő felsorolásuk is téves a 100. és a 99. feladat megfogalmazásával, mivel minden tankönyvben található feladat 36 kódvonzatot, csatornát irányít. *A szöveges feladatok megszámolása pedig egyszerűen kétségbe ejtett.* Önök úgy gondolják, hogy csak az számít szöveges feladatnak, ami hagyományos szövegezésű. Nálunk, a heurisztikus programozásban és így a Felfedező matematikánál is inkább azok a szöveges feladatok képviselik a nagyobb értéket, ahol egy szerkezeti rajz alapján *maguk hozzák létre a tanulók.* Itt már valóban képeket és képrejtvényeket alkalmazok: kincsesház, banánfa, páva, földrajzi térkép jelölései, szőlőfürt, robotok stb. A 4. osztályos segédkönyv 122. oldalán lévő páva segítségével több száz szöveges feladat készíthető. Ugyanez mondható el a Felfedező matematika oldalain megjelenő minden hasonló szerkezet alapján. Elviselhetetlen bonyolultságot emleget az elemzés a 68. és a 23. oldal tennivalóinak megfogalmazása kapcsán. *Ez a tolnais gyerekeknek egyáltalán nem bonyolult,* így azonban, ahogy Önök kimásolták a könyvből pontatlanul, valóban bonyolulttá válik. Nem a „kontinensek" neveinek számával, hanem „kontinensnevek" betűinek számával. Így az értelmes. E pontban még azt is leírják, hogy képrejtvények sokaságát kell megfejteniük a gyermekeknek néhány művelet elvégzéséhez. Ez pontosan fordítva van, mivel egy-egy képrejtvény segítségével megszámlálhatatlanul sok műveletet végezhetnek el a gyermekek (lásd a piramisokat, stilizált fákat vagy a 3. osztályos segédtankönyv 102. oldalán lévő szőlőfürtöt és szerkezeti oldalt, amelynek segítségével több ezer művelet és szöveges feladat készíthető).

A 4. pont utolsó bekezdését minden tolnais kolléga azonnal megcáfolná. *Programunkban minden pontosan fordítva történik az itt leírtakkal, ugyanis e program nem veszi súlyosan igénybe, és főleg nem zavarja meg a gyermekek figyelmét, gondolatait, hanem rávezeti a valóban fontos tapasztalatok, összefüggések motivált megláttatására.*

5. Az elemzés 5. pontja hasonló az előzőekhez. Szörnyűséges vádak sokaságát vonultatja fel. A mechanikus gyakorlásról és arról, hogy miért kezelem ismeretként a tényanyagot, már írtam. Itt ilyen szavakat használnak: „néhány esetben", „a közlést, illetve egy minta megmutatását választom tanítási módszerként, amit a gyerekeknek csak követniük kell értelem nélkül". *Könyvemben, ha egyetlen egy feladatot vagy feladatsort be tudnak mutatni, hogy az nem épít a megértésre, azaz gondolkodás nélkül megoldható, akkor elfogadottnak tekintem e területen történő vádjaikat.*

Súlyos sértésként fogalmazták meg rám való tekintettel a módszertani szabadság félreértelmezésének lehetőségét. Erről nem kívánok többet írni.

Az 5. pont utolsó bekezdését egyszerűen nem vagyok hajlandó leírni sem! Ismételten kijelentem, hogy Önök elvakult dühükben nem fogták föl annak a jelentőségét, hogy ebben a két sorban, amellyel gyilkolni is lehet, mit írtak le.

6. Az elemzés utolsó pontja szakmai tévedésekről beszél, természetesen „néhol" szavak kíséretében. *Nyomdai hiba minden könyvben előfordul,* így a jelenleg forgalom-

ban lévő alsó tagozatos bármely matematikai könyvben. Több hibát én is jelölök a kézikönyveimben. Itt is van azonban olyan megfogalmazás, amit nem értek, pl. „helyiértéket próbál belelátni a római számírás számjeleibe". Ehhez a megfogalmazáshoz valóban analfabéta vagyok.

Zárszóként a 6. pont befejezése *méltó a teljes elemzés ars poeticájához*. Ehhez nincs is több hozzáfűzni valóm.

Válaszom zárszavaként azért én leírom az országos véleményt a megjelent 4 Felfedező matematika című alkotó-szerkesztői munkámról. *A tanulók hihetetlen motiváltsággal és eredménnyel dolgoznak oldalain, a pedagógusok csak dicsérő, pozitív véleményt nyilvánítanak a heurisztikus programozású alternatíva most már igazán komplex matematikai együtthatójáról.* Én a kisiskolásoknak, az alsó tagozatos gyermekeknek készítettem a teljes programomat, beleértve a matematikát is. *Ők értik és szeretik, munkájuk eredményes és biztató, és nekem ez a fontos!*

Büszkén vállalom a század elején élt Czukrász Róza tanítónő sorsát, akit szintén el akart söpörni korának tudományos társasága olyannyira, hogy ki is tiltották Budapest területéről. Önökön most a sor, még ezt is megtehetik!

TIPPEK, TRÜKKÖK, ÖTLETEK

Tippek, trükkök, ötletek címmel indítjuk útjára új rovatunkat, ahol olyan feladatmegoldásokat mutatunk be, amelyek egy-egy trükk vagy ötlet alkalmazásával, néha meglepő fordulattal ötletessé, egyszerűbbé teszik a megoldást.

Kedves Kollégák! Várjuk furfangos megoldásaikat, tippjeiket, akár egyetlen feladatra is! Kedvcsinálóként **Csordás Mihály** és **Nagy Tibor** által beküldött feladatokat adjuk közre.

1. Hány olyan egész szám van 1 és 1995 között, amelyben szerepel a 7-es számjegy?

Megoldás: Ezt a feladatot a tanulók többsége úgy próbálja megoldani, hogy először az egyjegyű, majd a kétjegyű, a háromjegyű és végül a négyjegyű számok közül keresi meg a feltételeknek megfelelőket. Ez a megoldási mód körülményes, hosszadalmas, és emellett könnyen elszámolható. Nézzük most ennek a feladatnak egy elegánsabb megoldását! Ehhez alkalmazzuk a következő három trükköt:

1. A feltételeket módosítsuk úgy, hogy a keresett számokat 0-tól 1999-ig határozzuk meg!

2. A számokat a szám elé írt nullákkal egészítsük ki négyjegyűre (pl. 7 helyett a 0007-et, 234 helyett a 0234-et tekintsük)!

3. Először azokat a számokat határozzuk meg, amelyekben nem szerepel a 7-es számjegy!

Ezek alapján keressük azokat az *ABCD* alakú négyjegyű számokat, ahol *A* két értéket (0; 1), a többi betű pedig 9 értéket (7-es egyik sem lehet) vehet fel. Ilyen szám $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 1458$ van. Mivel 0-tól 1999-ig 2000 természetes szám található, ezért olyan számokból, amelyekben szerepel 7-es számjegy $2000 - 1458 = 542$ van. E számok közül a feladat eredeti feltételeinek egy, az 1997 nem felel meg, ezért a keresett számok száma $542 - 1 = 541$.

2. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege páratlan, és a nála eggyel nagyobb szám számjegyeinek összege is páratlan?

Megoldás: Erre a feladatra minden olyan tanuló, akit nem sikerült kellően megfertőzni matematikával azt válaszolja, hogy nincs ilyen szám. Ha azokat a számokat vesszük, amelyekhez egyet hozzáadva csak az egyes helyiértékű helyen álló számjegy változik meg, akkor a feltételeknek megfelelő szám valóban nem található, mert a százas és tízes helyiértéken álló számjegyek összege változat-

lan maradt, és ehhez az összegéhez egyszer páros, egyszer páratlan számot adunk hozzá, így az összeg is egyszer páros, egyszer páratlan. Előfordulhat azonban, hogy az egyes helyiértéken álló számot eggyel megnövelve más helyiértéken is megváltoznak a számjegyek (a 9-re végződő számok esetén). Vizsgáljuk meg az ilyen számokat!

1. eset: Először vegyük azokat, amelyekhez egyet hozzáadva csak az egyes és tízes helyiértéken történik változás! Ahhoz, hogy a feltételeknek megfelelő számot találjunk, szükséges és elegendő, hogy amennyiben a százas helyiértéken páratlan szám állt, a tízes és az egyes helyiértéken álló számjegyek összege a növelés előtt és után is páros legyen; illetve ha a százas helyiértéken páros szám állt, akkor az egyes és tízes helyiértéken álló számjegyek összege növelés előtt és után is páros legyen. Ilyen számok:

119	209	319	409	519	609	719	809	919
139	229	339	429	539	629	739	829	939
159	249	359	449	559	649	759	849	959
179	269	379	469	579	669	779	869	979
	289		489		689		889	

Ebben az esetben összesen 40 darab szám felel meg a feltételeknek.

2. eset: Nézzük azokat a számokat, amelyekhez egyet hozzáadva az egyes, a tízes és a százas helyiértéken történik változás! Ebben az esetben nincs a feltételeknek eleget tevő szám, mert ekkor a növelés előtt a tízes és egyes helyiértéken álló számjegyek összege $9+9=18$, tehát páros; a növelés után ugyanezen helyiértékeken $0+0=0$, szintén páros szám áll, a százas helyiértéken viszont egyszer páros, egyszer páratlan szám. Így mindkétszer nem lehet az összeg páratlan.

3. eset: Végül tekintsük azt az esetet, amikor még az ezres helyiértéken is bekövetkezik változás a növelés után! Ilyen szám csak egy van, a 999. Ebben a számban a számjegyek összege páratlan, a nála eggyel nagyobb szám az 1000, melyben a számjegyek összege szintén páratlan, tehát megfelel a feltételeknek.

Összesen $40+1=41$ darab olyan pozitív háromjegyű szám van, melyben a számjegyek összege páratlan, s a nála eggyel nagyobb szám számjegyeinek összege is páratlan.

3. Melyik szám gyöke az

$$\frac{x+6}{1995}+\frac{x+5}{1996}+\frac{x+4}{1997}=\frac{x+3}{1998}+\frac{x+2}{1999}+\frac{x+1}{2000}$$

egyenletnek?

Megoldás: Könnyen rájöhetünk, hogy a feladatot a szokásos közös nevezőre hozással csak nagyon bonyolult, hosszadalmas számolással tudjuk megoldani, ha közben sehol sem számoljuk el. Egy trükkös megoldás ötletét (az alagút végén a fényt) talán az jelentheti, hogy a számlálóban szereplő szám és a nevező összege minden esetben 2001. A mérlegelvet alkalmazva adjunk az egyenletben szereplő mindegyik törthöz 1-et!

$$\frac{x+6}{1995}+1+\frac{x+5}{1996}+1+\frac{x+4}{1997}+1=$$
$$=\frac{x+3}{1998}+1+\frac{x+2}{1999}+1+\frac{x+1}{2000}+1$$

Az egyenletben szereplő összeget alakítsuk át a következők szerint:

$$\frac{x+6}{1995}+1=\frac{x+6}{1995}+\frac{1995}{1995}=\frac{x+2001}{1995}.$$

Mindegyiket így átalakítva kapjuk:

$$\frac{x+2001}{1995}+\frac{x+2001}{1996}+\frac{x+2001}{1997}=$$
$$=\frac{x+2001}{1998}+\frac{x+2001}{1999}+\frac{x+2001}{2000}.$$

Ebből:

$$\frac{x+2001}{1995}+\frac{x+2001}{1996}+\frac{x+2001}{1997}-$$
$$-\frac{x+2001}{1998}-\frac{x+2001}{1999}-\frac{x+2001}{2000}=0,$$
$$(x+2001)\left(\frac{1}{1995}+\frac{1}{1996}+\frac{1}{1997}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{1998}-\frac{1}{1999}-\frac{1}{2000}\right)=0.$$

Mivel a kéttényezős szorzat második tényezője pozitív, ezért

$$x+2001=0$$
$$x=-2001.$$

Az egyenlet gyöke tehát negatív egész szám.

Pályázat: 1996
Válogatás a beérkezett feladatokból

Több és igen különböző típusú feladatot javasoltak olvasóink az 1996-os évszámhoz kapcsolódva. Most az általános iskolai matematikai ismeretekre támaszkodva is érthető, megoldható feladatokból válogatunk.

Répcelakról *Szopory Adrienn* 5. osztályos tanuló és édesanyja *Szoporyné Szabó Piroska* tanárnő – többek között – a következő feladatokat javasolta:

1. Soroljuk fel 1996 osztóit!

Megoldás: 1, 2, 4, 499, 998, 1996.

2. Milyen számjegyre végződik $1996^{1996} - 1$?

Megoldás: 5-re, mert 6-nak bármely pozitív egész kitevőjű hatványa 6-ra végződik.

3. Rakjuk nagyság szerint csökkenő sorrendbe a következő számokat:

$$19^{96};\ 19^{9+6};\ 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6;\ 1 \cdot 9 \cdot (9+6);$$
$$(1+9) \cdot (9+6);\ (1+9) \cdot 9 \cdot 6;\ (1+9)^9 \cdot 6;$$
$$1^{996};\ 199^6;\ 19^{9^6}.$$

Megoldás:

$$19^{9^6} > 19^{96} > 19^{9+6} > 199^6 > (1+9)^9 \cdot 6 >$$
$$> (1+9) \cdot 9 \cdot 6 > 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 > (1+9) \cdot (9+6) >$$
$$> 1 \cdot 9 \cdot (9+6) > 1^{996}.$$

4. Írjuk fel az egyjegyű természetes számokat az 1, 9, 9, 6 számjegyeket ebben a sorrendben pontosan egyszer felhasználva úgy, hogy a számjegyek közé a négy alapművelet jelét, zárójeleket írhatunk, megengedjük még a négyzetgyökvonás használatát is.

Megoldások például:

$1 = 1 + (9 - 9) : 6;$
$2 = -1 - 9 : \sqrt{9} + 6;$
$3 = (1 \cdot 9 + 9) : 6;$
$4 = 1 + 9 : (9 - 6);$
$5 = \left((1+9) \cdot \sqrt{9}\right) : 6;$
$6 = (1 + 9 - 9) \cdot 6;$
$7 = 1 + 9 - 9 + 6;$
$8 = 1 + 9 : 9 + 6;$
$9 = 1 \cdot 9 : \sqrt{9} + 6.$

Lehet folytatni tovább is.

Kis Gábor tanár kolléga Szegedről ugyanezt a legutolsó, 4. feladatban szereplő ötletet küldte el (többek között), ő 1-től 100-ig állította elő hasonló módon az egész számokat, megengedve még az egész kitevőjű hatványozás alkalmazását is.

$[1 - (9 : 9)] \cdot 6 = 0$
$1 + [(9 - 9) \cdot 6] = 1$
$[(-1 + 9) \cdot 9] : 6^2 = 2$
$(1 \cdot 9) : (9 - 6) = 3$
$1 + [9 : (9 - 6)] = 4$
$-1 + 9 - 9 + 6 = 5$
$[1 - (9 : 9)] + 6 = 6$
$1 + 9 - 9 + 6 = 7$
$1 + (9 : 9) + 6 = 8$
$[(1 \cdot 9) : (9 - 6)]^2 = 9$
$[1 + (9 : 9)]^2 + 6 = 10$
$-1 + 9 + 9 - 6 = 11$
$1 \cdot (9 + 9 - 6) = 12$
$1 + 9 + 9 - 6 = 13$
$-1 + (9^3 : 9^2) + 6 = 14$
$\left(1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9}\right) + 6 = 15$

$1 + (9^3 : 9^2) + 6 = 16$
$-1 - 9 - 9 + 6^2 = 17$
$(1 \cdot 9) + (9 - 6)^2 = 18$
$1 - 9 - 9 + 6^2 = 19$
$-1 + \sqrt{9} + (\sqrt{9} \cdot 6) = 20$
$(1 \cdot 9 \cdot \sqrt{9}) - 6 = 21$
$1 + \sqrt{9} + (\sqrt{9} \cdot 6) = 22$
$-1 + 9 + 9 + 6 = 23$
$(1 \cdot 9) + 9 + 6 = 24$
$1 + 9 + 9 + 6 = 25$
$-1 + [(9 + 9) : 6]^3 = 26$
$1 \cdot 9 \cdot (9 - 6) = 27$
$1 + [(9 + 9) : 6] = 28$
$\sqrt{(1 - \sqrt{9})^2} + (9 - 6)^3 = 29$
$(1 + 9) \cdot (9 - 6) = 30$
$1 + (\sqrt{9} + \sqrt{9})^2 - 6 = 31$
$-1 + (9^2 : \sqrt{9}) + 6 = 32$
$1 \cdot (9^2 : \sqrt{9}) + 6 = 33$
$-1 - (9 : 9) + 6^2 = 34$
$-1 + 9 - 9 + 6^2 = 35$
$\{[1 - (9 : 9)] + 6\}^2 = 36$
$1 + 9 - 9 + 6^2 = 37$
$1 + (9 : 9) + 6^2 = 38$
$\left[(1 \cdot \sqrt{9})^3 : 9\right] + 6^2 = 39$
$[1 + (9 : 9)]^2 + 6^2 = 40$
$-1 + (\sqrt{9} + \sqrt{9})^2 + 6 = 41$
$1 \cdot (\sqrt{9} + \sqrt{9})^2 + 6 = 42$
$1 + (\sqrt{9} + \sqrt{9})^2 + 6 = 43$
$-1 - 9 + (9 \cdot 6) = 44$
$(-1 \cdot 9) + (9 \cdot 6) = 45$
$1 + (9^2 : 9) + 6^2 = 46$
$-1 + 9 + \sqrt{9} + 6^2 = 47$
$[-1 + (9^2 : 9)] \cdot 6 = 48$
$(1 + 9 - 9 + 6)^2 = 49$
$-1 - \sqrt{9} + (9 \cdot 6) = 50$
$(-1 \cdot \sqrt{9}) + (9 \cdot 6) = 51$
$1 - \sqrt{9} + (9 \cdot 6) = 52$
$-1 + 9 + 9 + 6^2 = 53$
$1 \cdot (9^2 : 9) \cdot 6 = 54$
$1 + 9 + 9 + 6^2 = 55$
$-1 + \sqrt{9} + (9 \cdot 6) = 56$
$1 \cdot \sqrt{9} + (9 \cdot 6) = 57$
$(1 + \sqrt{9}) + (9 \cdot 6) = 58$
$-(1 + \sqrt{9}) + (\sqrt{9})^3 + 6^2 = 59$
$[1 + (9^2 : 9)] \cdot 6 = 60$
$(1 + \sqrt{9})^3 - (9 - 6) = 61$
$-1 + (9^2 : \sqrt{9}) + 6^2 = 62$
$(1 \cdot 9) + (9 \cdot 6) = 63$
$[1 + (9 : 9) + 6]^2 = 64$
$-1 + 9^2 - 9 - 6 = 65$
$(1 \cdot 9)^2 - 9 - 6 = 66$
$1 + 9^2 - 9 - 6 = 67$
$\left\{\sqrt{\left[1 - (9 : \sqrt{9})\right]^2}\right\}^5 + 6^2 = 68$
$(1 - \sqrt{9})^6 - 9^0 + 6 = 69$
$\left[1 + (9 : \sqrt{9})\right]^3 + 6 = 70$
$-1 - 9 + (9 - 6)^4 = 71$
$(-1 + 9) \cdot (9 - 6)^2 = 72$
$1 - 9 + (9 - 6)^4 = 73$
$-1 + (9 \cdot 9) - 6 = 74$
$1 \cdot (9^3 : 9) - 6 = 75$
$1 + (9 \cdot 9) - 6 = 76$
$-1 + 9^2 - 9 + 6 = 77$
$(1 \cdot 9)^2 - 9 + 6 = 78$
$1 + 9^2 - 9 + 6 = 79$
$-1 + [(9 + 9) : 6]^4 = 80$

$(1 \cdot 9) \cdot (9-6)^2 = 81$

$1 + [(9+9) : 6]^4 = 82$

$-1 + 9^2 + 9 - 6 = 83$

$[(1+9) \cdot 9] - 6 = 84$

$1 + 9 + 9^2 - 6 = 85$

$-1 + (9 \cdot 9) + 6 = 86$

$1 \cdot 9 \cdot 9 + 6 = 87$

$1 + (9 \cdot 9) + 6 = 88$

$-1 + 9 + (9-6)^4 = 89$

$(1+9) \cdot (9-6)^2 = 90$

$(1+9) + (9-6)^4 = 91$

$[1 + (9:9)]^7 - 6^2 = 92$

$1 + (9^0 + 9^0)^7 - 6^2 = 93$

$[1 + (9^2 : 9)]^2 - 6 = 94$

$-1 + 9 + 9^2 + 6 = 95$

$[(1+9) \cdot 9] + 6 = 96$

$1 + 9 + 9^2 + 6 = 97$

$-1 - 9 + \left(\sqrt{9} \cdot 6^2\right) = 98$

$\left(1 \cdot \sqrt{9}\right)^4 + \left(\sqrt{9} \cdot 6\right) = 99$

$\{[1 + (9:9)]^2 + 6\}^2 = 100$

További feladatai közül ide illik még a következő is:

Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 1-nél nagyobb és 3-mal, 5-tel, 7-tel és 19-cel osztva is 1 maradékot ad.

Megoldás: $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 + 1 = 1996$.

Boroncsok Béláné Vácról küldte a következő, már összetettebb feladatot.

Az $\overline{ABBC}$ alakú négyjegyű számról a következőket tudjuk:

- a számjegyek összege az egyesek és az ezresek helyén álló számjegyek különbségének négyzete;
- a számhoz hozzáadva a tízesek helyén álló számjegyet és az összegből kivonva az ezresek és egyesek helyén álló számjegyek összegét, 18-cal osztható számot kapunk;
- a számjegyek fordított sorrendbe írásával kapott $\overline{CBBA}$ négyjegyű szám prímszám.

Megoldás: Hallgatólagos megállapos az ilyen feladatokban az, hogy különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

Az első feltétel szerint

$$A + B + B + C = (C - A)^2 \quad \text{és}$$

mivel négy (nem egyenlő) számjegy összege 36-nál kisebb, így $(C-A)^2 < 36$, tehát $|C - A|$ legfeljebb 5 lehet.

A második feltétel szerint

$$1000A + 100B + 10B + C + B - A - C = \\ = 999A + 111B = 111(9A + B)$$

18-cal osztható szám. Mivel 111 osztható 3-mal, de 9-cel nem, $9A + B$ egy 6-tal osztható szám. Ekkor azonban B is osztható 3-mal, tehát B értéke 0, 3 vagy 9 lehet.

A harmadik feltétel szerint A páratlan, tehát B is páratlan, így csak 3 vagy 9 jöhet szóba.

Így továbbhaladva kideríthető, hogy $B = 9$ jó csak, ebből következik, hogy $(C-A)^2 = 25$ és így $C - A = 5$, vagy $A - C = 5$, $A + C = 7$.

Végül azt kapjuk, hogy az egyetlen megoldás: 1996.

Fazekas Gabriella tanárnő Hatvanból egy 7-8. osztályosoknak szánt feladatsort küldött be.

1. A számjegyek összege

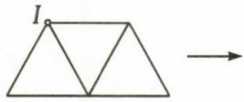
1.1. Egy embertől azt kérdezték, hány éves. Azt felelte, olyan évben született ebben a században, amikor az évszám számjegyeinek az összege éppen négyzetszám volt. Azóta még hétszer jegyezte fel életében ezt a tulajdonságot az évszámról. Tudjuk-e milyen idős?

1.2. Mekkora lehet a korkülönbség e század legfiatalabb és legidősebb szülötte között, ha tudjuk, mindketten olyan évben születtek, amikor az évszám számjegyeinek összege négyzetszám volt?

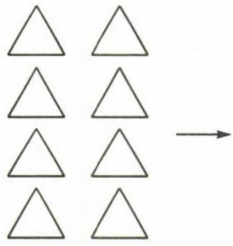
1.3. Vajon hány olyan négyjegyű szám van, amelynek számjegyeit összeadva négyzetszámot kapunk, ha a számban csak a következő számjegyek fordulhatnak elő: 0, 1, 6, 9?

2. Szabályos háromszögek

2.1. Az ábra szerint 180°-os forgatással és eltolással egymás mellé illesztünk 1996 db egységnyi oldalú szabályos háromszöget. Mekkora utat tenne meg egy bogár a megjelölt pontból indulva, ha minden háromszög mindegyik oldalán pontosan egyszer halad át?



2.2. Az ábra szerint négyes oszlopokba rendezve felrajzolunk 1996 db egységnyi oldalú szabályos háromszöget. Minden oszlopban forgassunk el egy háromszöget 60°-kal a szimmetria középpontja körül, az elsőben az elsőt, a másodikban a másodikat, a harmadikban a harmadikat, a negyedikben a negyediket, az ötödikben újra az elsőt, és így tovább. Majd újra kezdjük az elejéről, és *minden elforgatott helyzetű* háromszögtől számított hatodik háromszöget is forgassunk el az előbbi módon. Rajzold le, milyen lesz az 1996. háromszög!



Megoldások:

1.1. 1906-tól 1996-ig kilenc évente követik egymást azok az évszámok, amelyek számjegyeinek az összege négyzetszám. Viszszaszámolva az illető 1933-ban születhetett, ezért 63 éves.

1.2. A legfiatalabb 1996-ban, a legidősebb 1906-ban születhetett, a korkülönbség 90 év.

1.3. Végig kell gondolni, a 4, 9, 16, 25, 36 hányféleképpen bontható fel négy számjegy összegére, és ezekből a számjegyekből hány négyjegyű szám képezhető. Ha figyelembe vesszük a megkötést, a következő előállítások lehetségesek:

$1+1+1+1=4$	1 szám
$1+1+1+6=9$	4
$9+0+0+0=9$	1
$9+6+1+0=16$	18
$1+9+9+6=25$	12
$9+9+9+9=36$	1

Összesen 37 szám van.

2.1. Vízszintesen 1996 háromszög oldalt számíthatunk, a két párhuzamos közötti töröttvonal éppen 1997 szakaszból áll: az eredmény 1996 + 1997 = 3993.

2.2. Az első forgatással elforgatjuk azokat a háromszögeket, amelyek sorszáma 16-tal osztva rendre 1, 6, 11, 0 maradékot ad. Így elforgatjuk az 1990. háromszöget is. A második forgatásnál elég megfigyelni, hogyan viselkedik az első 48 háromszög. Ha egy háromszögön kétszer forgatunk, akkor már nem lesz elforgatott helyzetben, és figyelni kell a második forgatásnál már elforgatott háromszögeket is!

Elforgatott lesz az 1, 6, 7, 11, 12, 13, 16, 18, 19, 24, 25, 27, 30, 31, 32, 36, 37, 42-es háromszög, és ez 49-től ismétlődik tovább. Az 1990-es éppen a 22. lenne, amit a második forgatás eredeti helyzetébe visz, így az 1996. háromszög nem fordul egyszer sem.

HÍREK VERSENYEKRŐL

1996. január 18-án rendezték meg országszerte a *Varga Tamás Matematikaverseny* második, megyei (budapesti) fordulóját. A következőkben a kitűzött feladatokat közöljük. Az I. kategóriába tartoznak azok a tanulók, akik a matematikát legfeljebb heti 4 órában tanulják, a II. kategóriába azok, akik ennél magasabb óraszámban.

7. osztály

I. kategória

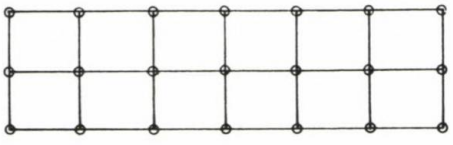
1. A 2000-nél kisebb természetes számok között hány olyan van, amely a 4, 5, 6, 9, 10 és 11 számok bármelyikével osztva hármat ad maradékul?

2. Mekkora szöget zár be a kocka egy csúcsból kiinduló két lapátlója?

3. Legkevesebb hány egymást követő egész számot kell összeszoroznunk ahhoz, hogy a szorzat osztható legyen 1995-tel, bárhogyan is választottunk ki ennyit?

4. Egy téglalap egyik átlójának felezőmerőlegese a téglalap hosszabbik oldalát két olyan részre osztja, amelyek közül az egyik egyenlő hosszúságú a rövidebb oldallal. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?

5. Az alább felrajzolt rácsban 11 rácspontot befestünk feketére. Bizonyítsuk be, bárhogyan is választjuk ezt a 11 pontot, lesz olyan téglalap, amelynek minden csúcsa fekete és oldalai rácsszakaszokra illeszkednek!

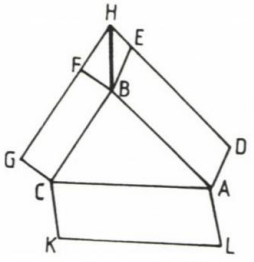


7. osztály

II. kategória

1. Hány olyan nem egybevágó téglalap van, amelynek kerülete 1996 centiméter, és oldalai centiméterekben mérve egész számok?

2. Az ABC háromszög AB és BC oldalára kifelé vegyük fel az ábra szerinti $ADEB$ és a $BFGC$ paralelogrammákat. A GF és az ED egyenesek metszéspontja legyen H. Írjuk a háromszög AC oldalára kifelé azt az $ACKL$ paralelogrammát, amelyre teljesül, hogy a CK, AL és a HB szakaszok páronként párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Igazold, hogy az $ACKL$ négyszög területe a másik két négyszög területének az összege!



3. Hét bolygó mindegyikén egy-egy csillagász figyeli a hozzá legközelebbi, a sajátjától különböző bolygót. A bolygók közötti távolságok mind különbözők. Mutasd meg, hogy van olyan bolygó, amelyet egyik csillagász sem figyel!

4. Igazold, hogy végtelen sok olyan négyzetszám van, amely előáll $3^m + 3^k$ alakban, ahol m és k különböző pozitív egészek!

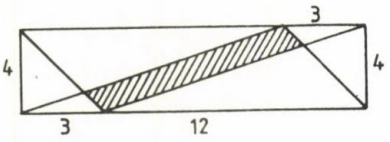
5. Egy körlapon elhelyeztünk hét húrt, ezek a körlapot kisebb tartományokra vágták. Legfeljebb hány ilyen rész keletkezett?

8. osztály

I. kategória

1. 36 reklámszatyrom van, 4 különböző színben. A fehérből kétszer annyi van, mint a szürkéből. 7-tel több piros van, mint szürke, és 1-gyel több a szürke, mint a zöld. Melyik színűből hány szatyrom van?

2. A rajzon látható téglalap oldalai 4 és 12 cm hosszúak. A hosszabbik oldal fölé egybevágó háromszögeket rajzoltunk úgy, hogy egy-egy csúcsuk 3 egységnyire legyen egy-egy téglalapcsúcstól. Mekkora a vonalkázott rész területe?



3. Van-e két olyan négyzetszám, amelyeknek a különbsége 1996? Melyek ezek? Hány ilyen pár van?

4. A számegyenesen megjelöltük a 0 pontot és a 10-hez tartozó pontot, majd a kettő között még három egész számhoz tartozó pontot. Tekintsük az összes olyan szakaszt, amelynek mindkét (egymástól különböző) végpontja, a megjelölt öt pontból való. Bizonyítsd be, hogy ezek között mindig van legalább két egyenlő hosszúságú!

5. Egy szabályos kilencszög oldalának hossza 5 cm. Add meg a leghosszabb és a legrövidebb átló hosszának a különbségét!

8. osztály

II. kategória

1. Adott 1996 darab olyan szám, amelyek mindegyikének abszolútértéke 1. Kiválasztható-e közülük néhány úgy, hogy a kiválasztottak összege egyenlő a nem kiválasztottak összegével?

2. A $2bx + b = 3cx + c$ egyenletben a b és c értékei 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 lehetnek. Hány párosításban lesz az egyenlet gyöke pozitív, ha b és c nem feltétlenül különböző érték?

3. Adott 1996 darab szám. Tudjuk, hogy közülük bármelyik ezer darabot összeadva pozitív összeget kapunk. Igaz-e, hogy az 1996 darab szám összege is pozitív?

4. Egy négyzet belsejében vegyünk fel egy pontot, majd kössük össze a négyzet csúcsaival. Mutassuk meg, hogy az így kapott négy szakaszból egy olyan négyszög szerkeszthető, melynek csúcsai a négyzet oldalain vannak!

5. Igazoljuk, ha $n > 3$ és egész, akkor

$$2 < \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n-1} < 2 + \frac{1}{n+1}!$$

A ***Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban*** 1995. december 8-án rendezték meg azt a 8. osztályosoknak szóló tehetségkutató versenyt, amelynek legjobbjai felvételt nyertek a gimnázium speciális matematika tagozatos osztályába. Az írásbeli versenyen kitűzött feladatok a következők voltak.

1. Hány olyan négyjegyű szám van, amelynek minden jegye különböző, az első jegye a legkisebb, az utolsó jegye a legnagyobb?

2. Egy faluban igazmondók és hazugok laknak. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazugok soha nem mondanak igazat. E falu lakói közül tízet megkértünk, nevezzen meg egy-egy hazugot. András Beát mondta, Bea Csabát, Csaba Dórát, Dóra Ernőt, Ernő Flórát, Flóra Gézát, Géza Helént, Helén Imrét, Imre Julit, Juli Andrást.
Hány igazmondó lehet köztük?

3. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyben a számjegyek szorzata 120?

4. Az ABC szabályos háromszög AB oldalának az A-hoz közelebbi harmadolópontja C', a BC oldal B-hez közelebbi harmadolópontja A', a CA oldal C-hez közelebbi harmadolópontja B'.

a) Bizonyítsd be, hogy az $A'B'C'$ háromszög szabályos!

b) Mekkorák az $AB'C'$ háromszög szögei? (Állításodat bizonyítsd!)

5. Melyik egész számokra a legkisebb az $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-7|$ kifejezés értéke? És az $|x-1|+|x+3|+|x-5|+|x+7|$ kifejezésé?

6. A kocka 12 élét akarjuk kiszínezni, hatot pirosra, hatot kékre. Legfeljebb hány lap lesz egyszínű? (Egyszínűnek akkor mondunk egy lapot, ha a négy határoló élét ugyanolyan színűre színeztük.) Legfeljebb hány lap lesz egyszínű, ha hetet színezünk pirosra és ötöt kékre?

A budapesti ***Berzsenyi Dániel Gimnáziumban*** 1995. december 16-án volt ugyanilyen célú verseny a 8. osztályosok számára, ezen a következő feladatokat oldották meg.

1. Felírtuk az egész számokat egymás alá 1-től 10 000-ig egy nagy papírlapra, ezután kihúztuk mindazokat, amelyekben akár a 0, akár az 1 számjegy szerepel. Több vagy kevesebb maradt meg, mint az eredetileg felírt számok fele?

2. Az adott AB szakaszt a P és Q pontokkal három egyenlő részre osztottuk, és a PQ szakasz fölé egyenlő oldalú háromszöget szerkesztettünk, amelynek harmadik csúcsa O. Az O pont körül $AO = BO$ sugárral kört rajzoltunk, ez a PO szakasz O-n túli meghosszabbítását a C pontban metszi.
Mekkorák az ABC háromszög szögei?

3. Kriszta elmesélte, hogy 1-től kezdve összeadta a pozitív egész számokat valamelyik számig. Az eredményt könnyű volt megjegyeznie, mert 1995 lett. Azt már elfelejtette, hogy melyik számnál fejezte be az összeadást. Barnabás rövid gondolkodás után azt mondta, hogy Kriszta rosszul számolt.
Igaza van-e Barnabásnak?

4. Egy 6 kg és egy 12 kg tömegű különböző ólomtartalmú ötvözetből egyenlő tömegű darabokat vágtak le. A 6 kg-osból levágott darabot összeötvözték a 12 kg-osból megmaradt darabbal és a 12 kg-osból levágott darabot összeötvözték a 6 kg-osból megmaradt darabbal. Így mindkét új ötvözetben ugyanannyi százalékos lett az ólomtartalom.
Mekkora a levágott darabok tömege?

5. Melyek azok az x és y pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy

$$x + y + xy = 1000\ ?$$

Az 1995/96. tanévi matematika feladatmegoldó pontverseny II. fordulójában kitűzött feladatok megoldása

A feladatok szövege az 1995/5. szám 22. és 23. oldalán olvasható.

95.25. Ha rendelkezésünkre áll egy prímszámtáblázat, akkor könnyű olyan egymást követő prímszám hármasokat keresni, amelyek összege is prímszám. A következő példákban az egymást követő prímszám hármasok legkisebb tagjaként az összes, szóbajöhető 100-nál kisebb prímszám szerepel:

$5 + 7 + 11 = 23$, $41 + 43 + 47 = 131$,
$7 + 11 + 13 = 31$, $53 + 59 + 61 = 173$,
$11 + 13 + 17 = 41$, $61 + 67 + 71 = 199$,
$17 + 19 + 23 = 59$, $67 + 71 + 73 = 211$,
$19 + 23 + 29 = 71$, $71 + 73 + 79 = 223$,
$23 + 29 + 31 = 83$, $79 + 83 + 89 = 251$.
$29 + 31 + 37 = 97$,

Keresés közben például olyan érdekes megfigyelést tehetünk, hogy a „rossz" prímszámhármasok – tehát amelyek összege összetett szám – is érdekesek, mert a jelzett határig mindegyik két prímszám szorzataként írható fel.

95.26. A keresett oszlopokon tehát a két szám leírásához csak 2 különböző számjegyet használtunk. Mivel az oszlopokra írt két szám összege mindig 555 és $0 + 5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 5$, ezért az ilyen oszlopokat 3 csoportba sorolhatjuk. Az első csoportba tartozókon csak a 0 és 5 számjegyek szerepelnek, ezek:

$$0 - 555;\ 5 - 550;\ 50 - 505;\ 55 - 500$$

és ezek a számok fordított sorrendben, tehát ebből a két számjegyből 8 oszlop lesz.

Hasonló módon az 1 és 4 számjegyeket tartalmazó oszlopok:

$$111 - 444;\ 114 - 441;\ 141 - 414;\ 144 - 411$$

és ezek a számok fordított sorrendben, tehát ezekből is 8 lesz.

Végül a 2 és 3 számjegyeket tartalmazó oszlopok:

$$222 - 333;\ 223 - 332;\ 232 - 323;\ 233 - 322$$

és ezek a számok fordított sorrendben, újra 8 oszlop.

Összesen tehát 24 olyan oszlop van, amelyen csak kétféle számjegy szerepel.

95.27. A legfelső sorban lévő szám egyjegyű, így csak 0 lehet, mert ez az egyetlen 3-mal is és 13-mal is osztható egyjegyű szám.

A következő sorba kétjegyű, 3-mal és 13-mal is osztható szám kerülhet. Ide tehát csak a 39 és a 78 jöhet szóba.

Folytassuk először a 39-cel! A harmadik sorba ekkor olyan háromjegyű szám kerülhet, amely osztható 39-cel, csupa különböző számjegyből áll és jegyei között nem szerepel a 0, 3, 9 számjegy. A 39-nek összesen 23 olyan többszöröse van, ami háromjegyű, ebből a felsorolt feltételeknek csak 5 tesz eleget: 156; 468; 546; 624; 741.

Hasonló módon folytatva mindegyikhez találunk megoldást; az eddigi 5 megoldás:

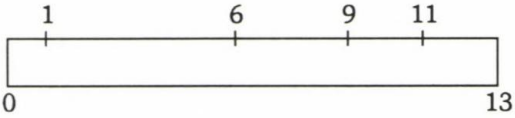
0	0	0
39	39	39
156	468	546
2847	7215	1287

0	0
39	39
624	741
5187	6825

A 78-hoz is tartoznak megoldások, ezek közül egyet írunk fel:

0
78
156
4329

95.28. A vonalzó két vége között mérhető a 13 cm. Mivel a 12 cm-t is mérni akarjuk, így vagy az 1-es, vagy a 12-es beosztásra szükség van. Hasonló módon a 11 cm méréséhez vagy a 2-es, vagy a 11-es beosztásra van szükség. A további töprengés és egy kis próbálgatás után kialakul például a következő megoldás:



Ha az 1, 6, 9, 11 jelű beosztások maradtak meg, akkor valóban bármely egész centiméter mérhető. Ezt a következő tömör felsorolás mutatja:

1: 0 – 1; 2: 11 – 13; 3: 6 – 9;
4: 9 – 13; 5: 1 – 6; 6: 0 – 6;
7: 6 – 13; 8: 1 – 9; 9: 0 – 9;
10: 1 – 11; 11: 0 – 11; 12: 1 – 13;
13: 0 – 13.

95.29. Sajnos a szokásos zsebszámológépbe nem fér be a szám pontosan, ehhez túl nagy. Könnyebb célhoz jutni, ha általánosan számolunk. Írjunk 1993 helyére $(2n - 1)$-et, ekkor persze $n = 997$. Így a kérdéses szám ilyen alakú:

$$(2n - 3)(2n - 1)(2n + 1)(2n + 3) + 16.$$

Mivel $(2n - 3)(2n + 3) = 4n^2 - 9$ és $(2n - 1)(2n + 1) = 4n^2 - 1$, a kifejezést így írhatjuk:

$$(4n^2 - 1)(4n^2 - 9) + 16.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket:

$$16n^4 - 40n^2 + 25.$$

Erről könnyű felismerni, hogy éppen

$$(4n^2 - 5)^2,$$

azaz négyzetszám. A mi esetünkben, tehát ha $n = 997$, akkor ezt kapjuk:

$$3976031^2.$$

95.30. A feladat megoldásához a következő ötlet segít. Helyezzük el a 49 számot egy 7×7-es négyzet alakú táblázatban a következő módon:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

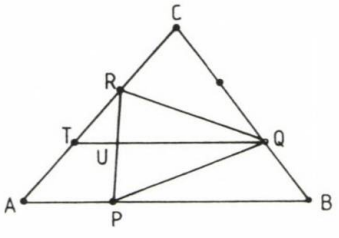
Ezután úgy osszuk hét csoportra a számokat, hogy mindegyik csoportba minden oszlopból és minden sorból pontosan egy szám kerüljön. Például a következő csoportok megfelelők, ezt könnyű ellenőrizni:

1, 9, 17, 25, 33, 41, 49;
2, 10, 18, 26, 34, 42, 43;
3, 11, 19, 27, 35, 36, 44;
4, 12, 20, 28, 29, 37, 45;
5, 13, 21, 22, 30, 38, 46;
6, 14, 15, 23, 31, 39, 47;
7, 8, 16, 24, 32, 40, 48.

A számok összege mindegyik csoportban 175.

Az 1, 2, 3, ..., n^2 számokat ($n > 1$, egész) teljesen hasonló módszerrel lehet n olyan egyenlő számú elemet tartalmazó csoportra bontani, amelyekben a számok összege egyenlő.

95.31. Az ábra jelöléseit használjuk.



Mivel T illetve Q a megfelelő oldalak harmadolópontjai, TQ párhuzamos AB-vel és a TQC háromszög hasonló az ABC három-

szöghöz, a hasonlóság aránya 2 : 3. Ezért $TQ = \frac{2}{3}AB$.

Az APR háromszögben TU középvonal, ezért

$$TU = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{6}AB.$$

Ezekből következik, hogy

$$UQ = \frac{1}{2}AB,$$

tehát

$$UQ = 3TU.$$

A szerkesztés menete tehát a következő: az RP szakasz U felezőpontját összekötjük Q-val, a QU szakaszt U-n túl egyharmadával meghosszabbítjuk, így kapjuk a T pontot. $RT = \frac{1}{3}AB$, így az A és C pont szerkeszthető, A-t P-vel, C-t Q-val összekötve megkapjuk az AB illetve CB oldalt.

95.32. A megadott példa ($6 = 2(2 + 1)$) alapján könnyű további példákat találni:

$$12 = 2(4 + 2),$$
$$18 = 2(6 + 3),$$
$$24 = 2(8 + 4).$$

Ezután hamar megfogalmazható az a sejtés, hogy a $6k$ ($k \geq 1$, egész) alakú számok jók. Valóban, $6k$-nak osztója $2k$ és k, és

$$6k = 2(2k + k).$$

Tegyük fel ezután, hogy egy $n > 1$ egész szám megfelelő, azaz van olyan n_1 és n_2 pozitív osztója n-nek, ($n_1 \neq n_2$), hogy

$$n = 2(n_1 + n_2). \qquad (1)$$

Ha $n = kn_1$ és $n = ln_2$ (nyilván $k, l > 1$, egészek), akkor az (1) egyenlőséget így is írhatjuk:

$$n = 2\left(\frac{n}{k} + \frac{n}{l}\right),$$

amiből ezt kapjuk:

$$1 = \frac{2}{k} + \frac{2}{l}. \qquad (2)$$

Átalakítás után (2) így írható:

$$(k - 2)(l - 2) = 4.$$

Ebből – mivel feltehetjük, hogy $k > l$ – azt kapjuk, hogy $k = 6$, $l = 3$, ami azt jelenti, hogy csak a 6-tal osztható n számok felelnek meg.

Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldjék: 6721 Szeged, Pusztaszeri u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és a külső felére írják rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő:**

1996. április 30.

67. Hány részre oszthatja és hány részre nem oszthatja a síkot öt, páronként különböző egyenes ?

Pintér Lajos, Szeged

68. Melyek azok a derékszögű háromszögek, amelyeknek oldalhosszai pozitív egész számok, valamint kerületük és területük mértékszáma megegyezik?

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

69. Jancsi egy konvex poliédert az élei mentén szétvágott, és a kapott lapokat borítékba téve elküldte Pistának. Pista a kapott lapokat mind felhasználva összeállított ezekből egy konvex poliédert. Lehetséges-e, hogy a két poliéder különböző ?

Szőkefalvi-Nagy Gyula Mat. Emlékverseny 1995-96.

70. Melyek azok az x; y; z pozitív és 1-nél kisebb valós számok, amelyekre

$$x^2 - y^2 = 2\cdot(x-y) \text{ és}$$

$$y^2 - z^2 = 2\cdot z\cdot(x-1)+1?$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

71. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan is adunk meg n darab általános helyzetű pontot a síkon, az így kapott ponthalmaz tartalmazza egy konvex ötszög csúcsait? (Egy pontrendszer általános helyzetű, ha semelyik három pontja sem illeszkedik egy egyenesre.)

72. Legyen minden $n \geq 1$ egészre

$$S_n = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + 1\right)^2.$$

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ határértéket!

Csete Lajos, Markotabödöge

Feladatmegoldások (49-54. feladatok)

49. Egy kilenctagú társaságban bármely három ember között van kettő olyan, akik ismerik egymást. Igaz-e, hogy ekkor van a társaságnak öt olyan tagja, hogy mindegyikük legalább négyet ismer a többiek közül? (Az ismeretség kölcsönös.)

Szőkefalvi-Nagy Gyula Mat. Emlékverseny 1994-95.

Megoldás: Ha a társaság minden tagjának legalább négy ismerőse van, akkor az állítás nyilván igaz.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy van a társaságnak olyan tagja, akinek négynél kevesebb ismerőse van. Jelöljön egy ilyen tagot a. Legyen továbbá T a társaság tagjaiból alkotott halmaz és A a T-nek azon részhalmaza, amelyet a és ismerősei alkotnak. Ha B jelöli az A-nak T-re vonatkozó komplementerét, akkor feltételezésünk értelmében $|A| \leq 4$, és így $|B| \geq 5$.

A továbbiakban kimutatjuk, hogy a B halmaz „elemei" mind ismerik egymást.

Ha b és c a B-ben vannak, akkor a, b és c közül kettő ismeri egymást, de ez a kettő csak b és c lehet, mert a nem ismer egyetlen személyt sem a B halmazból. Tehát B-nek bármely két tagja ismeri egymást. Mivel B-nek legalább öt tagja van, ezért bármelyikük legalább négy B-beli személyt ismer, ami az állítást bizonyítja.

Dályay Pál Péter, Szeged

Megjegyzések: 1. A feladat általánosítható: Ha egy $2n+1$ tagú társaságban bármely három ember közül legalább kettő ismeri egymást, akkor van legalább $n+1$ olyan tag, hogy mindegyikük legalább n embert ismer a többiek közül.

2. A feladat állítása éles abban az értelemben, hogy hat ember már nem választható ki a kívánt módon.

Tóth Sándor, Sárospatak

A megoldók száma: 8.

50. Igazoljuk, hogy bármely x, y valós szám esetén

$$\left(x^2+5\right)\left(y^2+5\right) \geq 12(x+y)+12!$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

I. megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség a műveletek elvégzése és 0-ra rendezés után a következő alakban írható:

$$x^2y^2 + 5x^2 + 5y^2 - 12(x+y) + 13 \geq 0.$$

A bal oldalon alkalmasan csoportosítva a következő, az eredetivel ekvivalens alakot kapjuk:

$$(x+y)^2 - 4(x+y) + 4 + x^2y^2 - 2xy + 1 +$$
$$+ 4\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4\left(y^2 - 2y + 1\right) \geq 0,$$

amiből

$$(x+y-2)^2 + (xy-1)^2 + 4(x-1)^2 + 4(y-1)^2 \geq 0.$$

Ez pedig bármely valós x és y esetén igaz. Látható az is, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y = 1$.

Dályay Pál Péter, Szeged
László Sándor, Szombathely
Simon József, Csíkszereda

II. megoldás: Egyenlőtlenségünk

$$(y^2+5)x^2-12x+5y^2-12y+13\geq 0 \qquad (*)$$

alakra rendezhető. $y^2+5>0$ minden y esetén fennáll, így (*) minden x-re akkor és csak akkor igaz, ha a bal oldal diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$12^2-4(y^2+5)(5y^2-12y+13)\leq 0.$$

Egyszerűsítés, rendezés és szorzattá alakítás után kapjuk, hogy

$$(y-1)^2(5y^2-2y+29)\geq 0.$$

Ez minden valós y esetén igaz, ugyanis a második tényező diszkriminánsa negatív. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $y=1$. (*)-ból adódik, hogy ekkor $x=1$.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma:13.

51. Mutassuk meg, hogy bármely háromszögben

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}T\max\left\{\frac{s_a}{m_a};\frac{s_b}{m_b};\frac{s_c}{m_c}\right\},$$

ahol T a háromszög területe, a; b; c az oldalak, $s_a; s_b; s_c$ a súlyvonalak, $m_a; m_b; m_c$ pedig a magasságok hosszát jelöli.

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a tekintett hányadosok közül $\frac{s_a}{m_a}$ maximális. Felhasználjuk, hogy $m_a=\frac{2T}{a}$ és $s_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. (Az utóbbit lásd pl. Reiman István: Matematika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1992., 223. oldal)

A bizonyítandó állítás így:

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}T\frac{a\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{4T}=$$
$$=a\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\,.$$

Pozitív számokról lévén szó, elegendő belátnunk, hogy

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)\geq 0\,.$$

Ez pedig teljesül, hiszen

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)=$$
$$=4a^4+b^4+c^4-4a^2b^2-4a^2c^2+2b^2c^2=$$
$$=\left(2a^2-b^2-c^2\right)^2\geq 0$$

Mivel átalakításaink a feladat feltételei mellett ekvivalensek voltak, ezért az állítást beláttuk. Látható az is, hogy ha $\frac{s_a}{m_a}$ maximális, akkor az egyenlőség szükséges és elegendő feltétele, hogy $b^2+c^2=2a^2$ teljesüljön.

Tóth Sándor, Sárospatak

A megoldók száma:11.

52. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx<2+\ln\pi\,!$$

Kovács Béla, Szatmár

Megoldás: A bizonyítás során fel fogjuk használni a határozott integrál intervallum szerinti additivitását,monotonitását, valamint a következő becsléseket: $0\leq\sqrt{\sin x}<\sqrt{x}$, ha $0\leq x\leq 1$; $0\leq\sqrt{\sin x}\leq 1$, ha $1\leq x\leq\pi$.

$$\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx=\int_0^{1}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx+\int_1^{\pi}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx<$$
$$<\int_0^{1}\frac{\sqrt{x}}{x}dx+\int_1^{\pi}\frac{1}{x}dx=\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{\pi}\frac{1}{x}dx=$$
$$=\left[2\sqrt{x}\right]_0^1+\left[\ln x\right]_1^{\pi}=2+\ln\pi\approx 3{,}145$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Nagy Erzsébet, Debrecen
Csete Lajos, Markotabödöge

Megjegyzés: A fenti levezetésben természetesen az $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ integrálon a következő improprius integrált értjük:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2\,.$$

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 8.

53. Vannak-e olyan p és q valós együtthatós polinomok, amelyekre a

$$\frac{d(1)+d(2)+\ldots+d(n)}{n} = \frac{p(n)}{q(n)}$$

egyenlőség minden pozitív egész n esetén teljesül? ($d(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát jelöli.)

Csete Lajos, Markotabödöge

Megoldás: Tételezzük fel, hogy léteznek olyan p és q valós együttható polinomok, hogy bármely pozitív egész n esetén

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = \frac{n\cdot p(n)}{q(n)}.$$

Ekkor, ha n legalább 2

$$d(n) = \frac{n\cdot p(n)\cdot q(n-1)-(n-1)\cdot p(n-1)\cdot q(n)}{q(n)\cdot q(n-1)}.$$

Jelölje $A(x)$ a jobb oldalon álló racionális tört számlálójában lévő polinomot, $B(x)$ pedig a nevezőben lévő polinomot. Így $d(n) = \frac{A(n)}{B(n)}$.

Mivel a fenti tört minden egyes prím helyen a 2 értéket veszi fel, ezért az $A(x) - 2B(x)$ polinomnak végtelen sok zérushelye van, ami csak úgy lehetséges, hogy $A(x) = 2B(x)$ azonosan teljesül minden x esetén. Ebből viszont az adódik, hogy $d(n) = 2$ bármely pozitív egész n esetén, ami nyilvánvalóan ellentmondás.

Kaptuk tehát, hogy nem léteznek a feltételnek megfelelő polinomok.

András Szilárd, Csíkszereda
Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 7.

54. Határozzuk meg az összes olyan háromszöget, amelyekben az oldalak hossza pozitív egész szám, az egyik oldal egységnyi hosszú, a másik két oldal valamelyikével szemközti belső szög tangense pedig egyenlő a másik két belső szög tangensének számtani közepével!

Szabó Kálmán, Miskolc

Megoldás: Jelölje a háromszög oldalait a, b, c, a velük szemben lévő belső szögek pedig legyenek rendre α, β, γ. Legyen továbbá $a = 1$ és $tg\beta = \frac{tg\alpha + tg\gamma}{2}$.

A háromszög-egyenlőtlenség alapján $a = 1 > |b - c|$, ami, lévén a, b és c pozitív egészek, $b = c$ esetén teljesülhet csak. Mivel mindhárom oldal legalább egységnyi hosszú, ezért a tekintett háromszög egyenlő szárú hegyesszögű háromszög. Így viszont a tangensekre vonatkozó feltételből adódik, hogy $tg\alpha = tg\beta = tg\gamma$ azaz a feltételeknek csak az egységnyi oldalú szabályos háromszög tesz eleget.

Megjegyzés: Nyilván ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha csak annyit teszünk fel, hogy valamelyik belső szög tangense egyenlő a másik két belső szög tangensének számtani közepével.

Nagy Erzsébet, Debrecen
Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 11.

A megoldók névsora: Ambrus Gabriella, Budapest (49., 50., 53., 54.); András Szilárd, Csíkszereda (49-52., 53. 2 mód, 54.); Barta László, Rimaszombat (49-52., 54.); Bíró Bálint, Eger (50., 54.); Csete Lajos, Markotabödöge (50-53.); Csorba Ferenc, Győr (50., 51., 54.); Dályay Pál Péter, Szeged (49-54.); László Sándor, Szombathely (50. 2 mód, 51., 52.); Nagy Erzsébet, Debrecen (49., 50. 2 mód, 51., 52., 54.); Simon József, Csíkszereda (49-51., 54.); Tóber Ernő, Nagykanizsa (49., 50. 2 mód, 51., 53., 54.); Tóth Sándor, Sárospatak (49. 2 mód, 50-54.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (50-54.).

MOZAIK KIADVÁNYOK A TANKÖNYVJEGYZÉKEN

1996/97

MATEMATIKA

Matematikai ismeretek
13-14 éveseknek

Matematika
Összefoglaló feladatgyűjtemény
10-14 éveseknek

Jól felkészültem-e?
Matematikai feladatsorozatok
5., 6., 7., 8. osztály, valamint
középiskolába készülőknek

Érdekes matematikai feladatok

Matematikai fogalmak, tételek

A logika alapjai

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 312-988, 312-578
MOZAIK Könyvesboltok:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 11-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VEGYIPSZOLNOK KÖNYVTÁR

Problémamegoldás az általános iskola matematika oktatásában

(Dr. Pintér János)

Egy feladat – többféle megoldás

(Dr. Werner Walsch – Dr. Ambrus András)

Tippek, trükkök, ötletek

(Csordás Mihály – Nagy Tibor)

Feladatrovat tanároknak

IV. ÉVFOLYAM 1996 3

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 490 Ft.

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban: Szeged, Csongrádi sgt. 73. Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben
Felelős vezető: Székely András

TARTALOM

Problémamegoldás az általános iskola matematika oktatásában
Dr. Pintér János, Zombor

Egy feladat – többféle megoldás
Dr. Werner Walsch, Halle
Dr. Ambrus András, Budapest

Tippek, trükkök, ötletek

Pályázat 1996
Válogatás a beérkezett feladatokból

Hírek versenyekről

A matematika feladatmegoldó pontverseny III. fordulójának megoldása

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

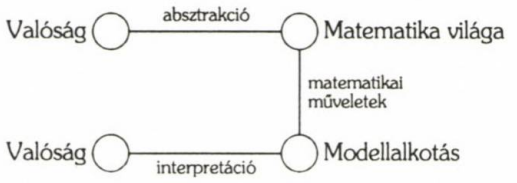
Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Dr. Pintér János

Problémamegoldás az általános iskola matematika oktatásában[1]

A valóság és a matematika közötti kapcsolatot az általános iskola matematika oktatásában a szöveges feladatok biztosítják. A matematikai modellezés folyamatát a következő képen ábrázolhatjuk:



A valóság problémáit előbb igyekszünk közvetlenül megoldani. A kvantitatív összefüggések többségénél azonban erre nincs lehetőségünk, vagy a direkt módszer ésszerűtlennek bizonyul. Ekkor a problémát közvetett módon próbáljuk megoldani, modell bevezetésével.

A modellalkotás lényegét az irreleváns adatok és szempontok absztrahálása, a kiemelt adatok kvantitatív összefüggései, valamint a matematikai műveletek világa képezi. A modellmegoldás interpretációjával újjáélesztjük a valóságot, most már a keresett adatok ismeretében, tehát tökéletesebb formában.

A problémák közvetlen megoldásánál különböző módszereket alkalmazunk:

- a logika módszereit,
- a halmazok módszereit,
- a számlálás módszerét stb.

A problémamegoldás főbb modellmódszerei az általános iskola alsó tagozatában:

- a gráfok módszere,
- a táblázatok módszere,
- az egyenlőségek, egyenletek és egyenlőtlenségek módszere stb.

A közvetlen módszerek alkalmazása általában egyszerűbb, mint az közvetett módszereké, mivel a műveleteket konkrétumokkal végezzük, míg a közvetett módszerek három lépcsőből állnak:

- előbb a megfelelő modellt kell megalkotni,
- majd a kapott modellt megoldani
- végül a modell megoldását értelmezni.

A konkrétumok és absztrakciók áthidalására a grafikus módszerek mutatkoznak a legalkalmasabbaknak. Ezért e két pólus között az általános iskolában gyakran szerepelnek a grafikus modellek, leginkább mint segédmódszerek.

Ennek a cikknek az a célja, hogy illusztráljon néhány olyan matematikai modellt és azok megalkotását, amelyek eredményesen alkalmazhatók az általános iskola alsó tagozatának matematika oktatásában. A problémamegoldás közvetlen módszereivel most nem foglalkozunk bővebben, sőt a grafikus módszerek modellszerepét se domborítjuk ki, inkább csak segédmódszer szerepükkel foglalkozunk. Tehát a dolgozat középpontjában a hagyományos matematikai modellek állnak, ami csaknem kizárólag egyenleteket, egyenlőtlenségeket jelent.

A megfelelő egyenlet felírása sokszor nagy gondot jelent, de a kapott egyenlet összetettsége sem mellékes, ugyanis ezen a szinten igen korlátozottak a megoldásukra alkalmazható algoritmusok.

[1] A cikk szerzője Zomboron, Jugoszláviában tanít egy tanítóképző főiskolán.

A feltételezés módszere

Az egyenes és fordított arányosság problémáinak a megoldására (melyek az alsóbb osztályok problémáinak zömét képezik) igen alkalmas a feltételezés módszere. Ennek – a lényegében logikai módszernek – az az alapötlete, hogy a feladat megoldását keresve feltételezünk egy „alkalmas" megoldást, majd összefüggésbe hozva azt a feladat körülményeivel és adataival, megkapjuk a keresett megoldáshoz vezető utat.

Ezt a modellt a következő problémák megoldásán keresztül fogjuk bemutatni.

1. Feladat: Egy udvarban nyulak és tyúkok vannak. Összesen 25 fejet és 80 lábat számláltunk meg. Hány nyúl és hány tyúk van az udvarban?

A feladatot hagyományosan a következőképpen oldják meg:

a nyulak számát jelöljük x-szel, a tyúkok számát jelöljük y-nal.

A feladat szerint:

$$x + y = 25 \quad \text{és} \quad 4x + 2y = 80.$$

A kapott kétismeretlenes egyenletrendszert átalakíthatjuk egyismeretlenessé. Az $y = 25 - x$ összefüggést figyelembe véve azt kapjuk, hogy:

$$4x + 2 \cdot (25 - x) = 80.$$

Innen: $x = 15$. Az y értéke az $y = 25 - x$ összefüggésből $y = 25 - 15 = 10$.

Felelet: Tehát az udvarban 15 nyúl és 10 tyúk van.

Ez a megoldási modell nem tekinthető a legalkalmasabbnak az általános iskola alsóbb osztályaiban. Az egyenletet sem könnyű felállítani, de a megoldása sem egyszerű ezen a szinten.

Oldjuk meg ugyanezt a problémát a feltételezés módszerével!

Tegyük fel, hogy az udvarban csak nyulak voltak. A 25 nyúlnak 100 lába lenne, de az udvarban csak 80 lábat számláltak meg.

Ha egy nyulat egy tyúkkal helyettesítünk, akkor a lábak száma 2-vel csökken. Tíz ilyen helyettesítéssel a lábak számát 20-szal csökkentenénk, tehát éppen 80 láb maradna, ami összhangban van a feladat követelményeivel.

Tehát 10 tyúk és 15 nyúl volt az udvarban.

2. Feladat: Egy ötvözetben a cink és a réz aránya 3 : 2. Hány kilogrammot tartalmaz az egyes fémekből a 45 kilogrammos ötvözet?

Oldjuk meg ezt a feladatot csak a feltételezés módszerével!

Alkalmas lenne feltételezni, hogy az ötvözetben a cinkből 3 kg, a rézből meg 2 kg van. De így összesen csak 5 kg ötvözetről lenne szó, holott a feladatban 9-szer többről (45 kg-ról) van szó. Nyilván akkor mindegyik fémből 9-szer többet kell venni. A cinkből 27 kg-ot, a rézből pedig 18 kg-ot. Így összesen 45 kg ötvözetet kapunk és a fémek aránya is 3 : 2-höz.

A feltételezés módszerét – ha nem is megfelelő szigorúsággal – a kisiskolások is eredményesen alkalmazhatják bonyolult problémák megoldására is.

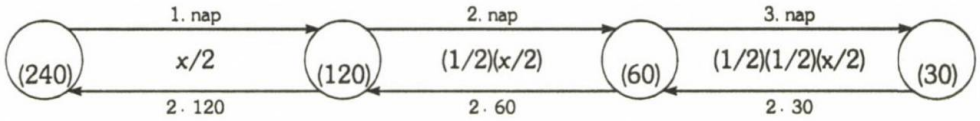
Az inverzió módszere

Egyes feladatok megoldására az egyenletek bonyolultnak bizonyulnak. Sokszor azonban a végeredménytől visszafelé, a feladat kezdetéig haladva és az eredeti műveletek inverzét alkalmazva könnyen megkapjuk a keresett megoldást.

Ezt a módszert is néhány jellemző példán keresztül mutatjuk be.

1. Feladat: Egy tanuló az első napon elolvasta egy könyv felét, másnap a fennmaradt rész felét, harmadnap pedig az előző napról fennmaradt rész felét, így a negyedik napra már csak 30 oldal maradt. Hány oldalas volt a könyv?

Ábrázoljuk a feladatot gráffal!



A kép alsó részében ábrázoltuk az inverzió módszerét. Ahelyett, hogy a mennyiségek felét vettük volna, ellentétes irányból kiindulva az adott mennyiségek kétszeresét vesszük. Tehát ha a negyedik napra 30 oldal maradt, ami az előző napra maradt terjedelemnek a felét tette ki, akkor előző nap $2 \cdot 30 = 60$ oldal maradt olvasatlan, az előtte való napon $2 \cdot 60 = 120$ oldal, az első napon pedig $2 \cdot 120 = 240$ oldal volt elolvasatlan. Tehát a könyv 240 oldalas volt.

Ha a feladatot egyenlettel próbálnánk megoldani, akkor igen bonyolult kifejezést kapnánk:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} + 30,$$

illetve:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 30.$$

A megoldás: $x = 240$.

2. Feladat: Kigondoltam egy számot, megszoroztam 3-mal, a szorzathoz hozzáadtam 5-öt, majd az összeget elosztottam 7-tel és végül az egészhez hozzáadtam 8-at. Eredményül 10-et kaptam. Melyik számra gondoltam?

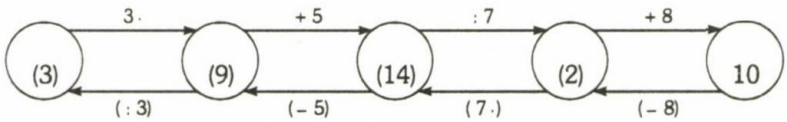
A megfelelő egyenletet viszonylag egyszerű felállítani, de megoldása már igen nagy nehézségekbe ütközik az alsó tagozaton.

A megoldandó egyenlet a következő:

$$(3x + 5) : 7 + 8 = 10.$$

A megoldás nyilván: $x = 3$.

Oldjuk meg ezt problémát is az inverzió módszerével. Ábrázoljuk az adott összefüggéseket és inverzeiket gráffal!



Az inverz műveletek alkalmazásával a végeredményből kiindulva egyszerű számolási műveletek segítségével sorra kapjuk a részeredményeket, végül a keresett megoldást is.

Ugyanis:

$$10 - 8 = 2$$
$$2 \cdot 7 = 14$$
$$14 - 5 = 9$$
$$9 : 3 = 3$$

Tehát a kigondolt szám a 3.

Ez az eljárás nyilván sokkal közelebb áll a gyerekekhez, mint az előbbi, ui. gondolkodásfejlesztő, keresi az összefüggéseket az ismert számolási műveletek között, és eredményes.

A szakaszmódszer

Az ideális matematikai modelleknek még mindig az egyenleteket tartják. Azonban a megfelelő egyenletek felállítása, de megoldása sem mindig zökkenőmentes, sőt mondhatnánk úgy is, hogy ezek a problémák az elemi matematika legkritikusabb tartalmai. Éppen ezért a matematikai modell felállításához sokszor használjuk a mértani szemléltetés módszereit, melyek hozzájárulnak a modell megalkotásához és annak optimalizálásához (módszertani optimalizáció).

Legtöbbször a szakaszmódszert választjuk, mert a legegyszerűbb és legoperatívabb a különböző mennyiségek összefüggéseinek ábrázolására.

Illusztráljuk ezt a módszert is néhány példán!

1. Feladat: Gabinak 36 üveggolyója van. Kétszer annyi fehér, mint sárga és annyi kék, mint amennyi fehér és sárga összesen. Hány fehér, sárga és kék golyója van?

A megoldáshoz alkalmazzuk a szakaszmódszert!

Sárga golyó: | x |

Fehér golyó: | x | x |

Kék golyó: | x | x | x |

Összesen: | x | x | x | x | x | x |

Tehát: $6x = 36$, amiből $x = 6$.

Felelet: Gabinak 6 sárga, 12 fehér és 18 kék golyója van.

2. Feladat: Két szám összege 56, hányadosa 4, a maradék pedig 1. Melyek ezek a számok?

Segédmódszer nélkül nehéz felállítani a megfelelő egyenletet és még nehezebb megoldani azt.

Ha a két keresett számot x-szel és y-nal jelöljük, akkor a feladat szerint:

$$x + y = 56 \quad \text{és} \quad x = 4y + 1,$$

vagy az egyismeretlenes modellre visszavezetve:

$$4y + 1 + y = 56,$$

azaz $y = 11$; $x = 4 \cdot 11 + 1 = 45$.

Felelet: A keresett számok: 45 és 11.

A szakaszmódszer ezt a folyamatot és a modellt is lényegesen leegyszerűsíti.

Az egyik szám: | x |

A másik szám: | x | x | x | x | 1 |

A két szám összege: | x | x | x | x | x | 1 |

Tehát: $5x + 1 = 56$, azaz $5x = 55$, innen: $x = 11$.

Felelet: Az egyik keresett szám 11, a másik pedig $4 \cdot 11 + 1 = 45$.

A téglalapmódszer

Miután a diákok elsajátították a téglalap területének kiszámítását, a téglalapmódszer nagyban hozzájárulhat a megfelelő matematikai modellek felállításához és optimalizálásához.

Sokszor előfordul, hogy a feladatokban két mennyiség szorzata szerepel. Ekkor e szorzatot egy olyan téglalap területével szemléltethetjük, amelynek oldalhosszai az adott mennyiségek.

Ismert tény, hogy egy téglalapot átalakíthatunk egy vagy több téglalappá úgy, hogy a területe egyenlő az adott téglalap területével, illetve két vagy több téglalap területének összegével.

Felhasználva ezeket a tényeket, egy igen hatásos segédmódszer birtokába jutunk, mely lehetőséget nyújt egy egész problémacsoport elemi megoldására.

Ezt a módszert két karakterisztikus problémán keresztül fogjuk bemutatni.

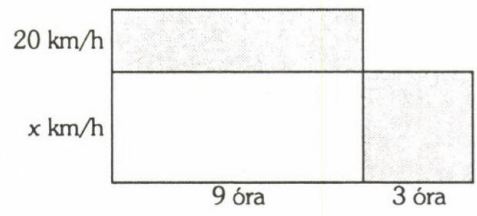
1. Feladat: Egy autó egy bizonyos távolságot 12 óra alatt tesz meg. Ha 20 km/h-val gyorsabban haladt volna, az utat 3 órával kevesebb idő alatt tette volna meg. Számítsuk ki az autó sebességét!

A matematikai modell felállításának klaszszikus módja igen sok elméleti és gyakorlati problémához vezetne, ezért ezen a szinten reménytelen vele kísérletezni.

Az egyenlet felállításához alkalmazzuk a téglalapmódszert!

Vegyük a téglalap alapjának az eltelt időt (12 h), magasságának pedig az ismeretlen sebességet (x km/h)! Így a téglalap területe a megtett utat szemlélteti (az idő és a sebesség szorzatát).

A feladat és a modell összefüggései alapján, ha a téglalap alapját 3-mal csökkentjük, magasságát pedig 20-szal növeljük, ugyanazt az utat illetve területet kapjuk. Ami azt is jelenti, hogy a képen látható két árnyékoltabb téglalap területe is egyenlő.



Tehát: $3 \cdot x = 9 \cdot 20$, innen: $x = 60$.

Felelet: Az autó sebessége 60 km/h.

2. Feladat: Hány kilogramm 40 dinár/kg-os kávét kell összekeverni 6 kg 55 dinár/kg-os kávéval, hogy a keverék ára 45 dinár/kg legyen?

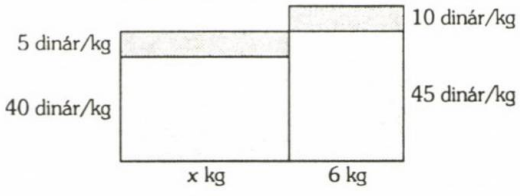
Most is a téglalapmódszert alkalmazzuk.

A keresett kávémennyiséget jelöljük x-szel. Induljunk ki egy 40 és x kiterjedésű téglalapból, melynek területe az x kg 40 dinároš kávé értéke. Az x oldalt hosszabbítsuk meg 6-tal! A 6-os fölé szerkesszünk egy 55 magasságú téglalapot! Ennek a területe a 6 kg 55 dinároš kávé értéke. A felvett magasságon jelöljük ki a 45-öt és rajzoljuk meg az $x + 6$ alapú és 45 magasságú téglalapot is, melynek a területe egyenlő a kapott 45 dinároš keverék értékével.

A feladat és a modell feltételei szerint a 40 és x kiterjedésű a 6 és 55 kiterjedésű téglalapok területének összege egyenlő kell hogy legyen a $6 + x$ és 45 kiterjedésű téglalap területével. Ez azt is jelenti, hogy a két árnyékoltabb téglalap területe is egyenlő, tehát:

$$5 \cdot x = 6 \cdot 10, \text{ azaz: } x = 12.$$

A grafikus segédmodell a következő:



Felelet: 12 kg 40 dinár/kg-os kávét kell összekeverni a 6 kg 55 dinár/kg-os kávéval, hogy a kapott 18 kg keverék ára 45 dinár/kg legyen.

Zárszó

A matematikai modellezés lehetőségeit, módszereit és segédmódszereit illusztráló példáink azt hivatottak bemutatni, hogy milyen kiaknázatlan eszközök állnak rendelkezésünkre a problémamegoldás segítésére.

Mint észlelhettük, a bemutatott modellek és módszerek igen hatékonyak úgy a modellkészítésben, mint azok leegyszerűsítésében.

Nyilván az említett modelleken és módszereken kívül léteznek még megfelelőbbek és eredményesebbek is az alsósok számára, amelyekkel érdemes lenne foglalkozni. A kezdeti matematikaoktatás eredményessége sokban függhet új modellek és módszerek alkalmazásától és azok informatizálásától. A modellmódszert egyrészt bővíteni, másrészt népszerűsíteni kell.

Irodalom

[1] Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája. Budapest, 1975.

[2] Pintér János: Matematičko - kibernetičko modelovanje u početnoj nastavi matematike. Učiteljski fakultet, Sombor, 1995.

[3] Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[4] Kocsondi András: Modellmódszer. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.

Dr. Werner Walsch – Dr. Ambrus András

Egy feladat – többféle megoldás

A matematikatanítás céljai között a tartalmi célok mellett fontos szerepet játszanak az ún. folyamati célok is. (Különböző képességek – pl. bizonyítási, definiálási, modellalkotási, problémamegoldási képességek – fejlesztése.) Ez utóbbi célok közé sorolható a következő: a tanulóknak nem szabad megelégedniük egy problémával kapcsolatban egyetlen megoldással, hanem törekedniük kell más megoldások megkeresésére is (egyszerűbb, rövidebb, racionálisabb, elegánsabb stb.).

Nyilvánvaló, hogy e képességre a tanulók későbbi élete során nagy szükségük lesz. A kü-

lönböző megoldások keresése jó lehetőséget biztosít egyik reprezentációs szintről egy másik reprezentációs szintre való átmenetre is. Nemzetközi tapasztalatok szerint sok tanuló számára egy probléma két különböző reprezentációja (szimbolikus megoldás – vizuális, grafikus megoldás) két különböző matematikai objektumot jelent, melyeknek semmiféle kapcsolatuk sincs egymással. Nem látják a kétféle reprezentáció közötti izomorfiát. Egy reprezentációról egy másikra való átmenetet a matematikaoktatás során tudatosan gyakoroltatni kell.

Ugyancsak fontosnak tartjuk az elemi geometriai megoldásokat. Többek között a számítógépes grafikát csak akkor tudják a tanulók megérteni, hatékonyan alkalmazni, ha a vázolt szituációkat tisztán geometriai szempontból fel tudják fogni, értik miről van szó. Sajnálatos, hogy a szintetikus geometria teljesen háttérbe szorult a lineáris algebrával szemben. Szerencsére Magyarországon a hagyományoknak köszönhetően megmaradt a szintetikus tárgyalási mód jelentősége is. A vizuális megoldás nagy előnye, hogy a tanulók a teljes megoldást mint egészet „át tudják látni".

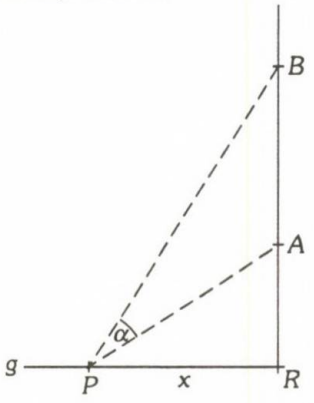
A fentiekben vázolt képességek fejlesztéséhez alkalmas feladatok kellenek. Az alábbiakban egy feladaton szeretnénk bemutatni a különböző megközelítési módokat.

Feladat: Egy futballedzésen a játékosok a pályán egy g egyenes mentén állnak föl, mely az alapvonalra merőlegesen áll, de nem metszi az AB gólvonalat. A játékosoknak a kapuhoz közeledve egy kedvező pontot (P) kell megtalálniuk, ahonnan az üres kapura kell rárugniuk a labdát (1. ábra). Melyik P pont a legkedvezőbb, azaz mely ponthoz tartozó α „lövőszög" a lehető legnagyobb? Mekkora α, ha $AR = 5{,}00$ m és a kapu $AB = 7{,}32$ m széles.

Egy szélsőérték-feladatról van szó, melynek különböző variánsai ismeretesek. Már a 15. században REGIOMONTÁNUSNÁL találkozhatunk vele (SCHUPP, 56. oldal).

„Egy 10 láb hosszú pálcát függőlegesen felfüggesztünk úgy, hogy a pálca alsó vége 4 lábnyi távolságra legyen a padlótól. A padló mely pontjaiból tűnik a pálca leghosszabbnak?"

A Geometriai feladatok gyűjteménye 1. kötetében a 996., 997., 998., 999. és 1000. feladatok témája hasonló.



1. ábra

Megoldás függvénytani ismeretek segítségével

Ha feladatunkat a 11. illetve 12. osztályban a differenciálszámítás tanításakor illetve utána tűzzük ki, akkor a következő megoldás lehetséges. Megpróbálunk összefüggést találni a P pont alapvonaltól való x távolsága és az α szög között ($0 \le x \le 120$, hivatalosan a futballpálya hossza maximálisan 120 m). Az α értékei 0 és 90° között változhatnak. (Határhelyzetben 0 is előfordulhat, bár esetünkben érdektelen.) Keresni kell egy differenciálható f függvényt és meg kell vizsgálni, hogy létezik-e maximuma a függvénynek, s mekkora ez a maximum?

Legyen $BPR\sphericalangle = \beta$, $APR\sphericalangle = \gamma$, $AB = a$, $AR = b$. Ekkor $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \dfrac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}$;

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a+b}{x}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{b}{x}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a+b}{x} \cdot \frac{b}{x}} =$$

$$= \frac{ax}{x^2 + b(a+b)}.$$

A keresett függvény

$$\alpha = f(x) = \operatorname{arctg}\frac{ax}{x^2 + b(a+b)};$$

$$f'(x) = \frac{a^2b + ab^2 - ax^2}{x^4 + x^2(a^2 + 2ab + 2b^2) + (ab + b^2)^2};$$

$f'(x)$ zérushelyei $x_1 = \sqrt{ab + b^2}$ és $x_2 = -\sqrt{ab + b^2}$.

Feltételeinknek csak az első gyök felel meg. f'' segítségével igazolható, hogy x_1 helyen maximuma van a függvénynek. Ez viszont nagyon sok munkát igényel. A következő egyszerűsítő megfontolások elegendőek: $f(x)$ függvény $x = 0$-tól kezdve először monoton nő, egy bizonyos x értéktől kezdve viszont monoton csökken, ezért kell lennie egy x_1 maximumhelynek, amely globális maximum.

A konkrét értékeket behelyettesítve kapjuk: $x_1 = 7{,}8485\ldots$.

A g egyenesen a kedvező lövőpozíció kb. 8 m-re van az alapvonaltól, a „lövőszög" pedig 25°.

Célszerű megvizsgálni, hogy létezik-e kevesebb elméleti apparátust igénylő megoldás. Azért is szükséges felvetni ezt a kérdést, mert az arctg függvény deriváltja sok középiskolában nem kötelező anyag.

Alsóbb osztályokban is lehet foglalkozni a problémával: értéktáblázatot készítünk, majd „végigpásztázzuk" az f függvényt. (Célszerű 1 méterenként vizsgálni a függvényt és az eredményeket 1 m-es pontossággal megadni.)

x (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α (fok)	6,7	12,6	17,3	20,4	22,9	24,2	24,9	25,0	24,8	24,4

A táblázatból leolvasható: a legnagyobb lövőszög 8 m-nél van, értéke 25°.

Ha grafikus zsebszámológép rendelkezésre áll a tanulóknak, akkor a függvény ábrázolása után a TRACE gombbal és a ZOOM funkció segítségével megkaphatjuk az eredményt tetszőleges pontossággal.

Ha sem grafikus számológép, sem komputer nem áll rendelkezésre és az arctg függvény sem ismeretes és el akarjuk kerülni a sok számolással járó értéktáblázat-készítést, akkor a következő megfontolások is eredményhez vezetnek. Jelöljük az áttekinthetőség kedvéért az $\frac{ax}{x^2 + b(a + b)}$ kifejezést $u(x)$-szel. A $0 < \alpha < 90°$ intervallumban a tangensfüggvény monoton nő. Ebből következik, hogy arctg $u(x)$ ugyanazon x-re veszi föl maximumát, mint $u(x)$, tg $u(x)$ is ugyanazon a helyen veszi föl maximumát, mint $u(x)$.

Ha $u(x)$-et $\frac{a}{x + \frac{b(a + b)}{x}}$ $(x \neq 0)$ formában írjuk fel, látható, hogy $u(x)$-nek akkor lesz maximuma, amikor a nevezőnek minimuma van, hiszen a számláló konstans. Az $f(x) =$ = arctg $u(x)$ függvény maximumának meghatározásához elegendő a lényegesen egyszerűbb $g(x) = x + \frac{b(a + b)}{x}$ függvényt vizsgálni. Ennek a függvénynek $x_1 = \sqrt{ab + b^2}$ helyen van minimuma, vagyis itt van az $f(x)$ függvény maximuma.

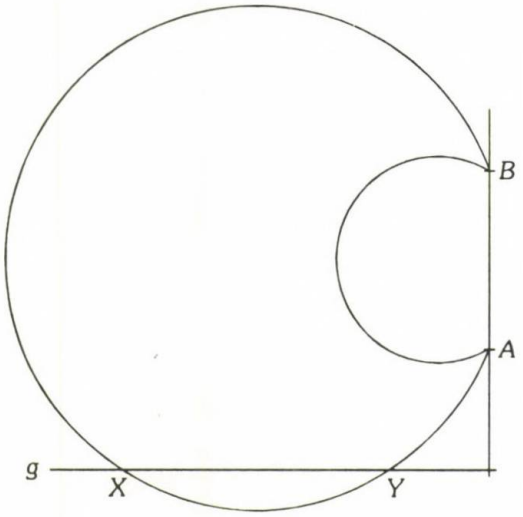
Geometriai megoldások

Problémaszituációnk geometriai modellje a következő: adott a síkban egy AB szakasz és egy g egyenes, amely merőleges az AB egyenesre és nem metszi az AB szakaszt. Meghatározandó a g egyenes azon P pontja (az AB egyenes által meghatározott egyik félsíkban), amelyből az AB szakasz a lehető legnagyobb szögben látszik.

Azon pontok halmaza a síkban, amelyekből az AB szakasz egy adott szögben látszik két, az AB szakaszhoz tartozó adott szögű látószögkörív. Tekintsük a félsíkunkba eső különböző szögű látószögköríveket. Ezek közül egyesek metszik félegyenesünket 2 pontban, egyeseknek nincs közös pontjuk a félegyenessel. Egyetlen látószögkörív van, melynek egy közös pontja van a félegyenessel. Tekintsünk egy olyan körívet, melynek 2 közös pontja van g-vel (X, Y) (2. ábra).

Az X, Y pontokból az AB szakasz egy bizonyos szögben látszik. Az XY szakasz belső

pontjaiból e szögnél nagyobb, a külső pontokból kisebb szögben látszik az AB szakasz. A fentiek értelmében az érintőkörív esetén az érintési pontból látszik a lehető legnagyobb szögben az AB szakasz. Feladatunk az érintőkör, az érintési pont illetve az érintési pont AB egyenestől való távolságának a meghatározása.



2. ábra

Megoldás geometriai tételek alkalmazásával

I. OP az érintési ponthoz tartozó sugár, tehát merőleges g-re. $r = OP = RF = 8{,}66$ m, $AF = 3{,}66$ m. OF az AB szakasz felezőmerőlegese. $OF = PR$. Az AFO derékszögű háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét, kapjuk:

$$OF^2 = r^2 - AF^2 = 61{,}5\,.$$
$$OF = PR = 7{,}85.$$

A „legkedvezőbb" lövőszög meghatározása:

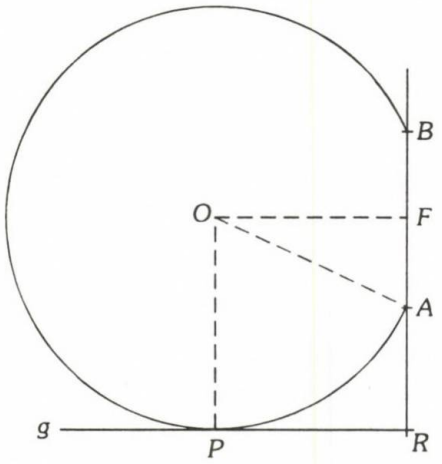
$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha) = \frac{8{,}66}{7{,}85}\,; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{5}{7{,}85}\,;$$

$\alpha = 25°$.

II. Az érintő- és szelőszakaszokra vonatkozó tételt alkalmazva kapjuk:

$$PR^2 = RA \cdot RB,$$
$$OF = PR = \sqrt{5{,}00 \cdot 12{,}32} = 7{,}8485\ldots$$

A továbbiakban α meghatározása ugyanaz mint a fentiekben.



3. ábra

Koordináta-geometriai megoldás

Helyezzük el az AB szakaszt és a g egyenest egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az A, B pontok az x tengely pozitív felére, a g egyenes pedig az y tengelyre essen. Tekintsük az A és B pontokra illeszkedő köröket. Ezek közül azt kell meghatároznunk, amely érinti az y tengelyt. A körsereg egyenlete:

$$(x - 8{,}66)^2 + (y - v)^2 = r^2,$$

hiszen a körök középpontjai az AB szakasz felezőmerőlegesén helyezkednek el. Az $x = 0$ egyenessel akkor van 1 közös pontja, ha a megfelelő másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0.

$$8{,}66^2 + (y - v)^2 = r^2$$
$$y^2 - 2vy + v^2 + 8{,}66^2 - r^2 = 0$$
$$D = 4v^2 - 4v^2 + 4r^2 - 4 \cdot 8{,}66^2 = 0$$
$$r = 8{,}66.$$

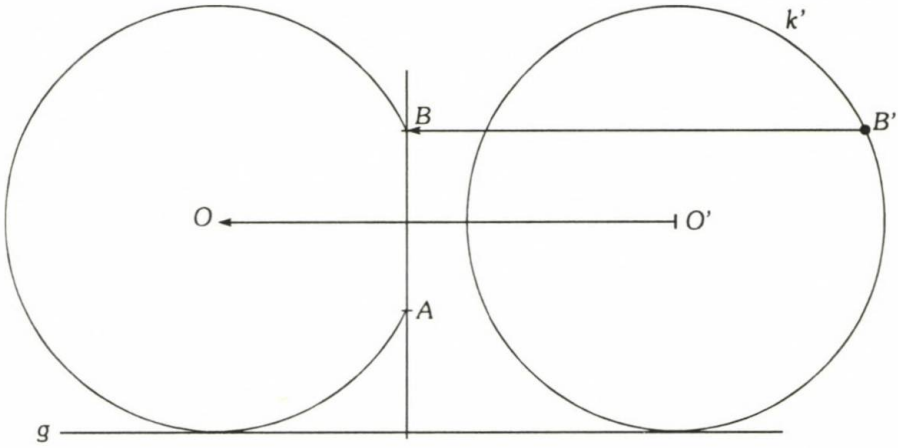
v meghatározása:

$$(5 - 8{,}66)^2 + v^2 = 8{,}66^2.$$

(Az A pont koordinátái 5; 0.) $v = 7{,}85$ m. α meghatározása a fentiekhez hasonló módon történhet.

Szerkesztéses megoldás

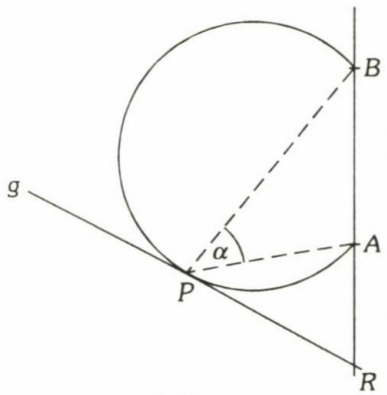
Szerkesszünk egy tetszőleges k' kört, mely érinti g-t és középpontja az AB szakasz felezőmerőlegesén helyezkedik el. A B pont megfelelőjét, B' pontot megkapjuk, ha a szakaszfelező merőlegessel a B ponton át párhuzamost húzunk. A $\overrightarrow{B'B}$ vektor a fenti kört az A és B pontokon átmenő körbe viszi át, mely érinti a g egyenest, azaz megfelel feltételeinknek. A továbbiakban a fentiekhez hasonló módon járunk el.



4. ábra

Általánosítás

Módosítsuk kiindulási feladatunk feltételeit. Tekintsünk egy olyan egyenest, amely nem merőleges a futballpálya alapvonalára. Ezen egyenesnek az alapvonallal bezárt szögét ismertnek tekintjük. Meghatározandó az adott egyenesnek azon pontja, amelyből az AB kapu a legnagyobb szögben látszik.



5. ábra

Számításos megoldás

Az érintő- és szelőszakaszokra vonatkozó tételt most is alkalmazhatjuk (5. ábra).

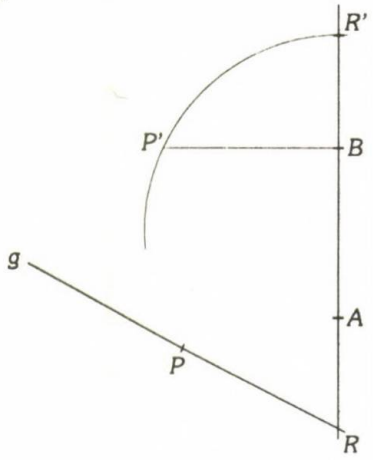
$$PR = \sqrt{RA \cdot RB}\,.$$

A kapu méretei természetesen nem változtak. Ha egyenesünk olyan R pontban metszi az alapvonalat, hogy RA távolság a korábbiakkal megegyező, akkor $PR = 7{,}85$ m. A PA és PB szakasz koszinusztétellel meghatározható: $PA = 6{,}88$ m, $PB = 10{,}80$ m. Az α szöget a koszinusztétel újabb alkalmazásával kapjuk: $\alpha = 42°$.

Szerkesztéses megoldás

I. Az érintő- és szelőszakaszokra vonatkozó tétel értelmében $RP = \sqrt{RA \cdot RB}$. Ez a kifejezés felfogható a magasságtétel alkalmazásának egy megfelelő derékszögű háromszögben. Mérjük fel az AB szakasz B-n túli meghosszabbítására az RA szakaszt, így egy R' pontot kapunk (6. ábra). Vegyük fel az RR' szakasz Thalész-körét. Az AB egyenesre a B pontban emelt merőleges kimetszi a Thalész-körből a P' pontot. BP' szakasz az RP sza-

kasszal egyenlő a feltételek szerint. A P pontot tehát megkapjuk, ha a g egyenesen az R pontból felmérjük a BP' szakaszt. Az érintő- és szelőszakaszok tételének megfordítása szerint P pont az A, B pontokon átmenő és g egyenest érintő kör érintési pontja. A keresett szög meghatározása az előbbiekhez hasonlóan történhet.



6. ábra

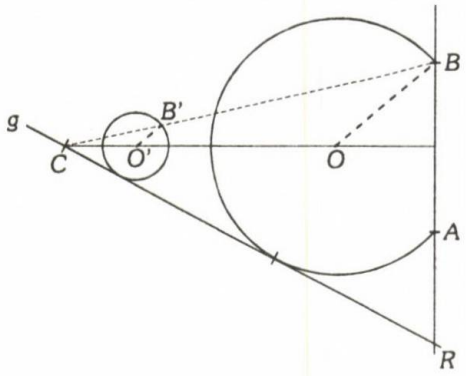
II. Középpontos hasonlóság alkalmazása (7. ábra).

Felveszünk egy, g egyenest érintő kört, melynek középpontja az AB szakasz felezőmerőlegesén helyezkedik el. E kör és a szerkesztendő kör között egy C középpontú (C pont az AB szakasz felezőmerőlegesének a g egyenessel alkotott metszéspontja) középpontos hasonlóság áll fönn. E transzformáció segítségével körünk megszerkeszthető. A hiányzó adatok meghatározása ugyanúgy történhet, mint az előzőekben.

Felvethető a probléma tisztán geometriai variánsa is már a legelején.

Adott egy síkban egy AB szakasz és egy g egyenes. Határozzuk meg a g egyenesen azt a pontot (pontokat), amelyekből az AB szakasz a legnagyobb szögben látszik.

Ebben az esetben a g egyenes és az AB szakasz minden lehetséges kölcsönös helyzetét meg kell vizsgálni, ami jó lehetőséget biztosít a diszkussziós készség fejlesztésére. Mi didaktikai szempontból mégis a „futballpályás" változatot ajánljuk, mert így esélyük van a gyengébb tanulóknak is a munkába való bekapcsolódásra.



7. ábra

Befejező megjegyzések

Az oktatási gyakorlatban gyakran előnyben részesítenek a tanárok egy bizonyos megoldási módot egy-egy feladattípussal kapcsolatban, mondván az a legegyszerűbb. Ezzel a felfogással óvatosan kell bánni, hiszen vannak tanulók, akikhez a vizuális, geometriai megoldás, míg másokhoz az algebrai megközelítés áll közelebb. Konkrét példákon keresztül kell megmutatni a különböző módszerek alkalmazásának előnyeit, össze kell hasonlítani a megoldásokat egyszerűség, elméleti igény, kreativitás stb. szempontjából. A fenti megfontolásokat is e szempontnak rendeltük alá. Az ideális helyzet az lenne, ha a tanulók az adott konkrét problémához tudnák kiválasztani a legmegfelelőbb, leghatékonyabb módszert. Természetesen előfordulhat, hogy egy módszert bizonyos elméleti ismeretek alkalmazása, begyakorlása céljából előnyben részesítünk.

Befejezésül szeretnénk kiemelni, hogy egy-egy probléma megoldása során nem a konkrét végeredmény a legfontosabb, hanem maga a problémamegoldási folyamat, az alkalmazott stratégiák, hiszen transzfer hatásuk csak ezeknek van.

Irodalom

[1] Geometriai feladatok gyűjteménye I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[2] Bonifert Domonkos: Néhány tipikus problémaszituáció matematikából. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1992.

[3] W. Walsch – A. Ambrus: Suchen nach verschiedenen Lösungswegen. Mathematik in der Schule. Berlin, 1996.

TIPPEK, TRÜKKÖK, ÖTLETEK

Ebben a számunkban most két téma köré csoportosítva mutatunk be feladatmegoldásokat, és ajánlunk még további feladatokat.

Kedves Kollégák! Továbbra is várjuk ötletes megoldásaikat, tippjeiket akár egyetlen feladatra is.

Róka Sándor

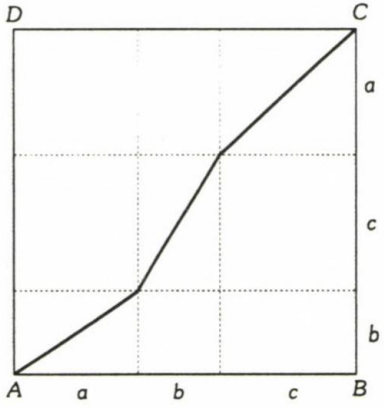
Algebrai feladatok geometriai háttérrel

Néha segít egy algebrai feladat megoldásában, ha megkeressük a feladat geometriai jelentését. Erre mutatnak példát a következő feladatok. (A feladatokban szereplő számok – ha erre nem történik utalás – tetszőleges valós számot jelentenek, s a bizonyításokat többnyire elegendő pozitív számokra elvégezni, abból következik az általános eset. A leírt bizonyítások vázlatosak.)

1. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq\sqrt{2}(a+b+c)$$

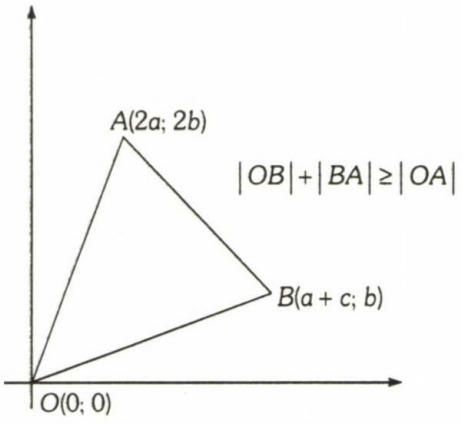
Megoldás: Az $a+b+c$ oldalú $ABCD$ négyzet AB oldalára mérjük egymás után az a, b, c szakaszokat, a BC oldalra a b, c, a szakaszokat, s az osztáspontokon át húzzunk párhuzamosokat az oldalakkal! Kijelölhető A és C között egy három szakaszból álló töröttvonal úgy, hogy ennek hossza az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés, s ez nyilván legalább akkora, mint az AC átló.



2. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\geq 2\sqrt{a^2+b^2}\ !$$

Megoldás: $O(0;\,0)$, $A(2a;\,2b)$, $B(a+c;\,b)$. Az $|OB|+|BA|\geq|OA|$ egyenlőtlenséget írjuk fel a koordinátákkal!



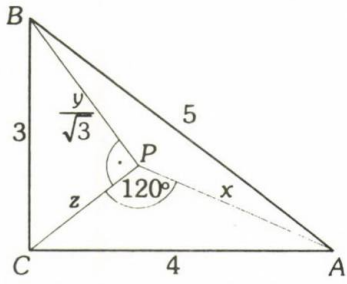
3. Az x, y, z pozitív valós számokra teljesülnek a következő egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+\frac{y^2}{3}&=25\\ \frac{y^2}{3}+z^2&=9\\ z^2+zx+x^2&=16\end{aligned}\right\}$$

Számoljuk ki $xy+2yz+3zx$ értékét!

Megoldás: Az ABC derékszögű háromszög BC, CA, AB oldalainak hossza 3, 4, 5.

A háromszög belsejében levő P pont olyan, hogy a BPC szög derékszög, a CPA szög 120°-os. A PA, PB, PC szakaszok hosszát x, $\frac{y}{\sqrt{3}}$, z jelöli. Ekkor a három egyenlet a háro m kis háromszögben felírt koszinusztétel, a keresett kifejezés pedig a háromszög területének $4\sqrt{3}$ -szorosa, $24\sqrt{3}$.



Gyakorlásul álljon itt néhány további feladat, melyek megoldását könnyíti, ha megtaláljuk a feladat geometriai tartalmát.

4. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}$$

5. Adva vannak az a, b, c pozitív számok. Határozzuk meg, hogy az

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}$$

függvény x mely értékére veszi fel legkisebb értékét!

6. Határozzuk meg az

$$f(x)=\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+1}$$

függvény minimumát!

7. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-4x+2} \geq \sqrt{\frac{17}{3}}\ !$$

Az ilyen feladatok iránt érdeklődő olvasó további szép feladatokat talál Imreh Csanád cikkében, mely a Polygon 1994. Novemberi számában jelent meg.

Tóth Sándor

Helyezzük el koordinátarendszerben!

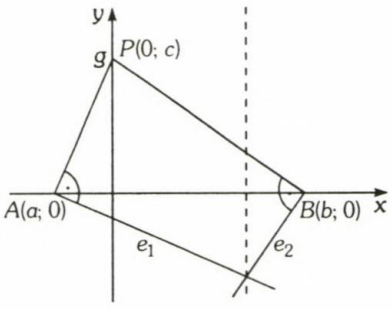
Maga a módszer nem ismeretlen, s az sem vitás, hogy könnyebb egyenletekkel, egyenletrendszerekkel számolni, mintsem komolyabb (pl. geometriai) meggondolásokat használni, egyes összefüggéseket észrevenni, bizonyítani. Egyszóval sok indok szól amellett, hogy egyes feladatokat koordinátarendszerben elképzelve, koordinátageometriai módon oldjunk meg. A gondot többnyire a gyakorlat hiánya jelenti, mert régen rossz, ha valaki erre az útra tér, s ezáltal jelentősen bonyolódik a megoldása, de az sem kisebb hiányosság, ha egy egyszerűbb módszer helyett, rendkívül terjedelmes lesz a feladat kérdésére adandó válasz elkészítése. Sok feladat megismerése kell ahhoz, hogy a diákokban kialakuljon az a bizonyos ráérző képesség, amikor, látszólag más típusú feladatok láttán az jut eszükbe, hogy ezt bizony érdemes lenne koordinátarendszerben elképzelni és megoldani.

A következő 3 példa, és a további felhasználás céljaira ajánlott feladatok, ennek a módszernek alkalmazási lehetőségeire kívánnak rámutatni, ezúttal a megszokottnál nehezebb problémák kitűzésével.

1. A g egyenes merőleges az A és B pontokat összekötő egyenesre. A g egyenesen fekvő P pontot kössük össze A-val és B-vel! Állítsunk merőlegest PA-ra A-ban, PB-re pedig B-ben! Határozzuk meg e merőlegesek metszéspontjainak mértani helyét, ha P végigfut a g egyenesen!

Megoldás: Vegyünk fel egy koordinátarendszert, amelynek abszcisszatengelye az AB, ordinátatengelye pedig a g egyenes. Legyenek a pontok: $A(a; 0)$; $B(b; 0)$ és $P(0; c)$ (1. ábra). A PA-ra A-ban, illetőleg a PB-re B-ben emelt merőlegesek egyenlete, ha $c \neq 0$:

$$y = \frac{a}{c}(x - a), \qquad y = \frac{b}{c}(x - b).$$



1. ábra

A két egyenes P' metszéspontjának koordinátáit ezen egyenletrendszer megoldása adja:

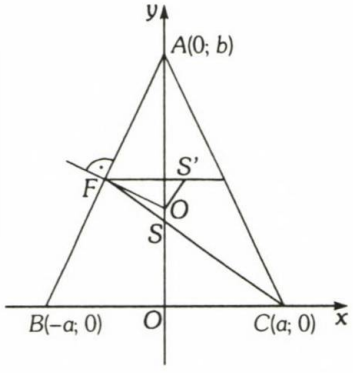
$$x = a + b, \qquad y = \frac{ab}{c},$$

a $b \neq a$ feltétel mellett. Mivel csak az y értéke függ c-től, a P' pontok mértani helye az $x = a + b$ egyenletű (y tengellyel párhuzamos) egyenes. Az AB egyenesen fekvő P pontoknak nincsenek megfelelőik.

Ha $a = b$, akkor a $PA = PB$-re merőleges egyenesek egybeesnek, minden pontjuk közös. De ha b tart a-hoz, akkor a metszéspont koordinátái tartanak $2a$-hoz, illetve $\frac{a^2}{c}$-hez, s a mértani hely az $x = 2a$ egyenes.

2. Az ABC egyenlő szárú háromszög ($AB = AC$) köré írható körének középpontja O, az AB szár felezőpontja F. Jelölje S' az AFC háromszög súlypontját. Bizonyítsuk be, hogy CF merőleges $S'O$-ra!

Megoldás: Helyezzük el az ABC háromszöget egy alkalmasan választott koordinátarendszerbe (2. ábra). Az ábra jelöléseit használva felírjuk az $S'O$, majd a CF vektorokat, s megmutatjuk, hogy skaláris szorzatuk 0, azaz egymásra merőlegesek. Az AB oldal F felezőpontjának koordinátái: $F\left(-\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.



2. ábra

Az AB oldal egy irányvektora: $\mathbf{v}(a; b)$, így az AB felező merőlegesének egyenlete:

$$ax + by = -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Ez az egyenes az y tengelyt az $x = 0$ helyen metszi, tehát $y = \frac{b^2 - a^2}{2b}$, azaz az ABC háromszög köré írható körének O középpontja:

$$O\left(0; \frac{b^2 - a^2}{2b}\right).$$

Az AFC háromszög S' súlypontja: $S'\left(\frac{a}{6}; \frac{b}{2}\right)$.

Így az $S'O$ vektor x_1; y_1 koordinátáira:

$$x_1 = \frac{a}{6} \qquad y_1 = \frac{a^2}{2b},$$

tehát

$$\overrightarrow{S'O}\left(\frac{a}{6}; \frac{a^2}{2b}\right).$$

A CF vektor x_F, y_F koordinátái:

$$x_F = \frac{3}{2}a \qquad y_F = -\frac{b}{2}$$

tehát

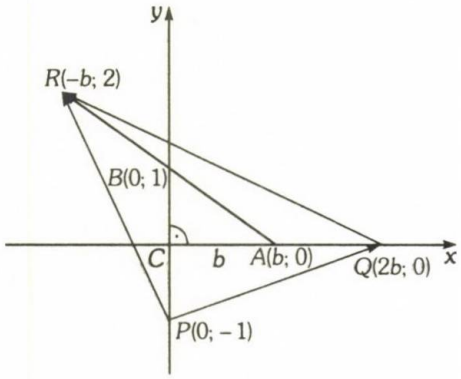
$$\overrightarrow{CF}\left(\frac{3}{6}a; -\frac{b}{2}\right).$$

A skaláris szorzat: $\overrightarrow{S'O} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{a}{6} \cdot \frac{3}{2}a + \frac{a^2}{2b} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0$. $S'O$ tehát valóban merőleges CF-re, s ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. Az ABC derékszögű háromszög oldalait meghosszabbítjuk: CA-t A-n túl az $AQ = CA$, AB átfogót B-n túl a $BR = AB$, BC-t C-n túl a $CP = BC$ szakasszal. Mi a feltétele annak, hogy a keletkezett PQR háromszög az eredetihez hasonló legyen?

Megoldás: Helyezzük el az ABC háromszöget egy koordináta-rendszerben úgy, hogy a derékszögű csúcs az origóba, a befogók pedig a tengelyekre illeszkedjenek (3. ábra). Így könnyen meghatározhatjuk a P, Q, R pontok koordinátáit:

$$P(0; -1); \quad Q(2b; 0); \quad R(-b; 2).$$



3. ábra

Ezek után meghatározhatjuk a $\mathbf{v}_{PR}$, $\mathbf{v}_{PQ}$, $\mathbf{v}_{QR}$ vektorokat:

$$\mathbf{v}_{PR}(-b; 3), \quad \mathbf{v}_{PQ}(2b; 1), \quad \mathbf{v}_{QR}(-3b; 2).$$

A PQR háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha a három vektor közül valamely kettő merőleges egymásra, azaz skaláris szorzatuk 0. Ha $\mathbf{v}_{PR}$ merőleges $\mathbf{v}_{PQ}$-ra, akkor $\mathbf{v}_{PR} \cdot \mathbf{v}_{PQ} = -2b^2 + 3 = 0$, innen $b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Ha pedig $\mathbf{v}_{PQ}$ merőleges $\mathbf{v}_{RQ}$-ra, akkor $\mathbf{v}_{PQ} \cdot \mathbf{v}_{RQ} = -6b^2 + 2 = 0$, s ebből $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ha $\mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{v}$-ra, akkor $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 3b^2 + 6 = 0$, aminek nyilván nincs megoldása.

Az első esetben az ABC háromszög oldalainak aránya $\sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5}$, s ekkor a PQR háromszög oldalaira:

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5},$$

a két háromszög tehát hasonló.

A második b érték esetén az ABC háromszög oldalainak aránya $1 : 2 : \sqrt{3}$, a PQR háromszögben pedig $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 1 : 2 : \sqrt{3}$, azaz ez a két háromszög is hasonló.

Összefoglalva, a keletkező PQR háromszög akkor és csak akkor lesz hasonló az eredeti ABC háromszöghöz, ha $b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ vagy $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ez a módszer az általánosításra is jó lehetőséget ad. Nézzük meg, hogyan alakul a megoldás, ha az eredeti háromszög oldalait nem kétszeresére, hanem k-szorosára nyújtjuk? Ekkor, az ábra jelölései mellett a P, Q, R csúcsok koordinátái:

$$P(0; -(k-1)); \quad Q(kb; 0); \quad R(-(k-1)b; k).$$

Felírva az oldalvektorokat, s feltételezve, hogy a derékszögű csúcs például P-ben van, a belső szorzat

$$\mathbf{v}_{PQ}\mathbf{v}_{QR} = -kb^2(k-1) + (k-1)(2k-1) = 0,$$

de mivel $k \neq 1$, ebből $b = \sqrt{\frac{2k-1}{k}}$. Hasonlóan vizsgálható a merőlegesség a többi csúcs esetén is, s a hasonlóság belátása is a konkrét esetnél látottaknak megfelelően történhet.

A módszer alkalmazására ajánlott további feladatok:

4. Az $ABCD$ négyzet BC oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja H. Legyen F a DC oldal C-n túli meghosszabbításának az a pontja, melyre $DC = 2CF$. Bizonyítsuk be, hogy az AH és BF egyenesek M metszéspontja illeszkedik a négyzet köré írható körére!

5. Legyen P az $ABCD$ négyzet egy belső pontja. A P pont A körüli $+90°$-os elforgatottja E, B körüli $-90°$-os elforgatottja F. Bizonyítsuk be, hogy az EG egyenes felezi a négyzet területét!

6. Az ABC háromszög A csúcsánál lévő szöge $45°$-os, a B csúcsnál lévő $22{,}5°$-os. Bizonyítsuk be, hogy az A-ból induló szögfelező, a B-ből induló súlyvonal és a C-ből induló magasságvonal egy ponton halad keresztül!

7. Adott a síkban két különböző pont: A és B. Állapítsuk meg az olyan ABC háromszögek C csúcspontjának mértani helyét, melyeknek magasságpontja a háromszög AB oldallal párhuzamos középvonalán van!

Irodalom

[1] Bereznai Gy. – Varecza Á.: Tanárképző főiskolák matematika versenyei I-II-III. Tankönyvkiadó, 1978., 1981., 1989.

[2] Gerőcs L.: Irány az egyetem! Nemzeti Tankönyvkiadó, 1993., 1994., 1995.

PÁLYÁZAT: 1996
Válogatás a beérkezett feladatokból

Kis Gábor kolléga többek között a következő feladatokat küldte be. A feladatokat középiskolásoknak, érettségire, felvételire készülőknek ajánljuk.

1. Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat!

$$A = \sin\frac{1996\pi}{3}, \quad B = \cos\frac{1996\pi}{3},$$

$$C = \operatorname{tg}\frac{1996\pi}{3}$$

Megoldás:

$$A = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$B = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2};$$

$$C = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

$$\underline{\underline{A < B < C.}}$$

2. Határozzuk meg az A^B kifejezés pontos értékét, ha $A = \left(\operatorname{tg}\frac{1996\pi}{3}\right)^{\cos\frac{1996\pi}{3}}$ és $B = \log_2\left|\cos\frac{1996\pi}{3}\right|$!

Megoldás:

$$A = \left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}};$$

$$B = \log_2\left|-\frac{1}{2}\right| = \log_2 2^{-1} = -1.$$

$$A^B = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{-1} = \underline{\underline{\sqrt[4]{3}.}}$$

3. Melyik szám a nagyobb?

$$A = \frac{10^{1996}+1}{10^{1997}+1} \quad \text{vagy} \quad B = \frac{10^{1995}+1}{10^{1996}+1}$$

Megoldás:

Hozzuk közös nevezőre a két kifejezést, mert ekkor elég a számlálókat összehasonlítanunk.

$$A = \frac{10^{3992} + 2 \cdot 10^{1996} + 1}{\left(10^{1997} + 1\right)\left(10^{1996} + 1\right)};$$

$$B = \frac{10^{3992} + 10^{1995} + 10^{1997} + 1}{\left(10^{1997} + 1\right)\left(10^{1996} + 1\right)} =$$

$$= \frac{10^{3992} + 10^{1996}(0{,}1 + 10) + 1}{\left(10^{1997} + 1\right)\left(10^{1996} + 1\right)}.$$

$$\underline{\underline{A < B.}}$$

4. Hány számjeggyel írható le a tízes számrendszerben a következő szám?

$$A = 1996^1 \cdot 1996^2 \cdot 1996^3 \cdot \ldots \cdot 1996^{1996}$$

Megoldás:

$A = 1996^{1+2+\ldots+1996} = 1996^{\frac{1+1996}{2} \cdot 1996} =$
$= 1996^{998 \cdot 1997}$, hiszen a kitevőben egy számtani sorozat 1996 db tagjának összege szerepel. $\lg A = 1997 \cdot 998 \cdot \lg 1996 \Rightarrow \underline{\underline{6577240}}$ db számjegy szükséges a végeredmény leírásához.

5. Milyen számjegyre végződik $9 \cdot A$, ha

$$A = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{1996 \text{ db } 9\text{-es}} ?$$

Megoldás:

$$A = (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots + (10^{1996} - 1) =$$

$$= 10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{1996} - 1996 \cdot 1 =$$

$$= 10 \cdot \frac{10^{1996} - 1}{10 - 1} - 1996$$

$$9A = \underbrace{10\left(10^{1996} - 1\right)}_{0\text{-ra végződik}} - 17964,$$

tehát az utolsó számjegy: 6.

6. Határozzuk meg az

$$f(x) = 3\sin 1996x + 4\cos 1996x$$

függvény legnagyobb értékét!

Megoldás:

$$f(x) = 5 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \sin 1996x + \frac{4}{5} \cdot \cos 1996x\right) =$$

$$= 5[\sin(1996x + 53{,}13°)] \le 5.$$

$$\underline{\underline{f(x)_{max} = 5.}}$$

7. Az

$$x^2 + (1995 - p)x + p - 2993{,}5 = 0$$

egyenletben adjuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy a gyökök négyzetösszegének minimuma 1996 legyen!

Megoldás:

$x_1 + x_2 = p - 1995$ és

$x_1 \cdot x_2 = p - 2993{,}5$ a Viète-formulák szerint.

A gyökök négyzetösszege:

$f(p) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 =$

$= (p - 1995)^2 - 2(p - 2993{,}5) =$

$= (p - 1996)^2 + 1996$ alakra hozható.

Innen leolvasható, hogy $p - 1996 = 0$, azaz $\underline{\underline{p = 1996}}$ esetén a gyökök négyzetösszegének minimuma $\underline{\underline{1996}}$ lesz.

8. Melyik az a legkisebb, 1-nél nagyobb egész szám, amely 3-mal, 5-tel, 7-tel és 19-cel osztva mindig 1 maradékot ad?

Megoldás:

$A = [3;\ 5;\ 7;\ 19] + 1 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 + 1 =$
$= \underline{\underline{1996.}}$

9. Bontsuk fel az 1996-ot két pozitív szám összegére úgy, hogy szorzatuk maximális legyen!

Megoldás:

A keresett számok: x és $1996 - x$. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget!

$$x \cdot (1996 - x) \le \left(\frac{x + 1996 - x}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1996}{2}\right)^2 = 998^2.$$

A maximális értéket $x = 1996 - x$ esetén veszi fel, azaz ha $\underline{\underline{x = 998.}}$

10. Határozzuk meg az

$$f(x) = x(1996 - x)^{1996}$$

függvény legnagyobb értékét a (0; 1996) intervallumon!

Megoldás:

$x \in (0; 1996) \Rightarrow x > 0$ és $(1996 - x) > 0$, így használhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget!

$$\sqrt[1997]{\underbrace{x(1996-x)\cdot\ldots\cdot(1996-x)}_{\text{1996 db tényező}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[1997]{1996\cdot x(1996-x)\cdot\ldots\cdot(1996-x)}}{\sqrt[1997]{1996}} \le$$

$$\le \frac{1996x + \overbrace{(1996-x)+\ldots+(1996-x)}^{\text{1996 db tag}}}{\sqrt[1997]{1996}\cdot 1997} =$$

$$= \frac{1996\cdot 1996}{\sqrt[1997]{1996}\cdot 1997}.$$

$$f(x)_{\max} = \left(\frac{1996^2}{\sqrt[1997]{1996}\cdot 1997}\right)^{1997},$$ melyet

$1996x = 1996 - x$, azaz $\underline{\underline{x = \frac{1996}{1997}}}$ esetén

vesz fel, és $\frac{1996}{1997} \in (0; 1996)$.

11. Oldjuk meg az egyenletet!

$$1996^x + 1996^{-x} = (\cos 1996y + \sin 1996y)^2.$$

Megoldás:

A jobb oldal átalakítható:

$$\cos 1996y + \sin 1996y =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 1996y + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 1996y\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\left[1996y + \frac{\pi}{4}\right]\right).$$

$$1996^x + 1996^{-x} = 2\cdot\sin^2\left(1996y + \frac{\pi}{4}\right).$$

A jobb oldal értékkészlete:

$$0 \le 2\cdot\sin^2\left(1996y + \frac{\pi}{4}\right) \le 2.$$

Megoldás csak akkor lehet, ha $0 \le 1996^x + 1996^{-x} \le 2$ teljesül. Mivel $1996^x + 1996^{-x} > 0$ mindig igaz, így elegendő megvizsgálni az $1996^x + 1996^{-x} \le 2$ egyenlőtlenséget.

$$1996^x + \frac{1}{1996^x} \le 2$$

Csak $x = 0$ esetén igaz.

$$1 + 1 = 2\cdot\sin^2\left(1996y + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\pm 1 = \sin\left(1996y + \frac{\pi}{4}\right).$$

Az egyenlet megoldásai:

$$y = \frac{\pi}{7984} + k\cdot\frac{2\pi}{1996};\quad k \in \mathbb{Z}\ \text{és}$$

$$y = \frac{5\pi}{7984} + l\cdot\frac{2\pi}{1996};\quad l \in \mathbb{Z}.$$

12. Oldjuk meg a pozitív prímek halmazán az egyenletet!

$$1 - \frac{1984}{xy} = \frac{3}{y} + \frac{4}{x}.$$

Megoldás:

$$1 - \frac{1984}{xy} = \frac{3}{y} + \frac{4}{x} \quad / \cdot xy$$

$$xy - 1984 = 3x + 4y$$

$$x(y-3) = 1984 + 4y \qquad (y \ne 3)$$

$$x = \frac{1984 + 4y}{y-3} =$$

$$= \frac{1984 + 4(y-3) + 12}{y-3} = \frac{4(y-3) + 1996}{y-3} =$$

$$= 4 + \frac{1996}{y-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y - 3 \mid 1996.$$

A megoldás: $\underline{\underline{(503; 7)}}$ és $\underline{\underline{(5; 1999)}}$.

13. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét!

$$[(\log_{1996}\operatorname{tg}1^\circ\cdot\log_{1996}\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\log_{1996}\operatorname{tg}89^\circ) + (\log_{1996}\operatorname{ctg}1^\circ\cdot\log_{1996}\operatorname{ctg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\log_{1996}\operatorname{ctg}89^\circ)]^{1996} = A.$$

Megoldás:

Az összeg mindkét tagjában szerepel egy-egy zérus értékű szorzótényező, mivel $\log_{1996} tg45° = \log_{1996} 1 = 0$ és $\log_{1996} ctg45° = \log_{1996} 1 = 0$. Így az összeg is nulla, így annak az 1996. hatványa is nulla. A megoldás: $\underline{\underline{A = 0}}$.

14. Van-e olyan konvex sokszög, amelynek 1996-szor annyi átlója van, mint ahány oldala?

Megoldás:

Oldalak száma: n, átlók száma: $\frac{n(n-3)}{2}$.

A feladat szövege alapján:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 1996 \cdot n \qquad /: n \ (\neq 0)$$

$$\frac{n-3}{2} = 1996$$

$$n = 2 \cdot 1996 + 3$$

$$n = 3995.$$

A keresett sokszög $\underline{\underline{3995}}$ oldalú.

Kallós Károly

1996 – színek a szürkeségben

Ez sorok írásakor, 1995-ben, azon gondolkozom, miben különbözik 1996 (mint sorszám) az 1995-től... Az utóbbiról több tucatnyi számrejtvény, talány, algebrai feladvány képez emléket, még egy könyv is késlelteti a mulandóságot. Az 1996 nagyon szerénynek látszik, bár első látásra feltűnik a másodfokú párosság, vagyis a 4-gyel oszthatóság. Ez már megszűri a számokat, hiszen a mondott tulajdonság csak minden negyedik egészre teljesül. A négyes komplementer osztója a 499 „örökölte" az eredeti szám 2 kilencesét – rejtély, véletlen.

A következő év sorszáma meglehetősen „szürke", nyilván nem versenyezhet jelentőség dolgában például az egységgel, a számelmélet elemi építőanyagával, „téglájával", a számegyenesen a végtelenbe gyalogoló marsallbotos paraszttal, a filozófia mindenesével – vagy a 2-vel, a dualitás reprezentánsával, a dialektika alternatív párjával, a jin-jang ellentétpárral, a kettes számrendszer alapszámával – vagy a 3-mal, az első páratlan prímmel, Brahma, Visnu és Siva szent hármasával, a keresztény szentháromsággal, az ókor és a középkor misztikus jelentőségű számával – vagy a 6-ossal, amely az első tökéletes szám, a legkisebb két valódi osztót hordozó számok között; vagy az ókor szent hetesével; vagy a biológiai alapon kitüntetett tízessel, és a többi különleges, érdekes számmal.

A múlt századforduló körül működött Ramanudzsan (indiai számelmélet tudós) szerint az egész számoknak egyénisége, „lelke" van, bizonyos számoknak színeket, indulatokat lehet tulajdonítani – vagyis a számokhoz érzelmi alapon is lehet viszonyulni. Valóban, ha szabadon eresztjük a beleérzésünket, empátiánkat, az 1995-öt szikárnak, kissé ridegnek, tartózkodónak, kimértnek érezhetjük, ezzel szemben az 1996 a másodfokú párossága miatt első látásra nyílt, bizalomgerjesztő.

Egy ceruzával rajzolt pontnak is végtelen sok tulajdonsága van – mennyivel inkább igaz ez egy elég nagy összetett számra! Míg azonban a kicsi pozitív egészek – mint építőkövek – önmagukban is érdekesek, a nagy összetett számok a szerkezetükben fellelhető kisebb számokon keresztül kapnak értelmet, jelentőséget, viszonyítási alapot. Ezért szokás a nagyobb számok „lelkivilágát" különböző felbontásokkal feltérképezni. A következő (saját szerkesztésű) feladatok ilyen szándékkal készültek.

1. Az $n \cdot x + y = 1996$ diofantikus egyenletben tegyük a következő megszorításokat: x olyan prím, amelynek jegyei a jobb oldalon álló számból kerülnek ki, egy jegy legfeljebb egyszer használható (x, n, $y > 0$, egész, $y > x$).
Mekkora x és y?
Hány megoldás van?
Keressük meg azt a megoldást, amelyben y számjegy összege a jobb oldali szám két szélső jegyének a különbségével egyenlő!

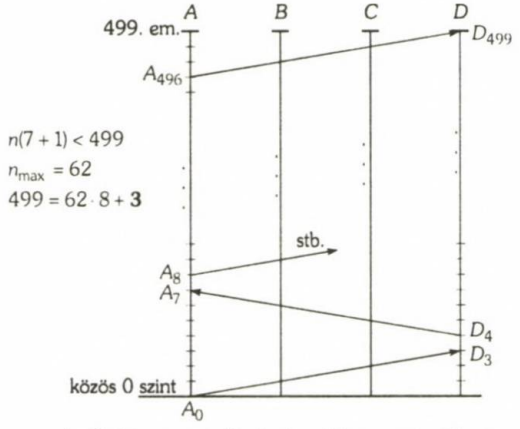
2. Írjuk fel az 1996-ot csupán négyes számjegyek és alapműveleti jelek segítségével!

3. Írjuk fel az 1996-ot csupa kettes számjegy és alapműveletek segítségével!

4. Írjuk fel 1996-ot (lehetőleg minél több egymást követő) köbszámok összege/különbsége segítségével!

5. Írjuk fel az 1996-ot, mint öt különböző köbszám összegét!

6. Ez a játékos feladat az $1996 = 4 \cdot (500 - 1)$ felbontáson alapul.



A Sziriusz egyik bolygóján egyenlő magasságról indulva, egy egyenes mentén, egyenlő távolságokban 4 darab egyenlő magasságú 499 emeletes épületet emeltek. Valamelyik meleg napon minden ablak nyitva volt, egy kíváncsi fecske berepült az egyik épület földszinti ablakán, átrepült a szomszéd ház első emeletén, majd az újabb szomszéd 2. emeletén, a következő harmadik emeletén stb., azonban szélső épülethez érve, ott mindig egy emelettel magasabbra szállt, úgy folytatta útját, míg végül felért a legfelső szintre. A balról számított A, B, C, D épületek melyikének a felső ablakán landolt?

Megoldások

1. A szóba jöhető prímek: 19, 91, 691, 991 (a 961 nem prím). Az adott feltételű felbontások:

$$21 \cdot 91 + 85 = 1996$$
$$2 \cdot 691 + 614 = 1996$$
$$2 \cdot 961 + 74 = 1996$$
$$1 \cdot 991 + 1005 = 1996$$
$$2 \cdot 991 + 14 = 1996.$$

Az első feladat kérdéseire a válaszok innen leolvashatók.

2. Felírás csupa négyessel:

$$1996 = 44 \cdot 44 + 44 + 4 \cdot 4.$$

3. Csak kettessel:

$$1996 = 2222 - 222 - 2 \cdot 2.$$

4. A feladat csak akkor oldható meg, ha egy „kicsit" megsértjük a feltételt:

$$1996 = 9^3 + 8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 2^3 - 1^3.$$

5. $1996 = 11^3 + 8^3 + 5^3 + 3^3 + 1^3$.

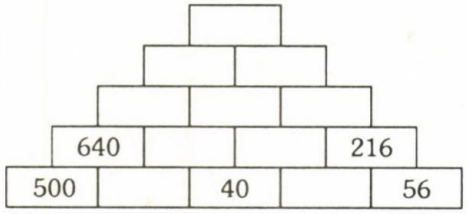
6. A feladat számtani sorozat segítségével oldható meg egyszerűen, de a logikai út is eredményre vezet. A felérkezés helye függ a kezdés helyétől.
Ha a fecske az A épület földszintjéről indul (A_0), akkor D_{499}-be érkezik. Ha B_0-ból indul, az erdmény ugyanez, mert a fecske a D_{498}-ból a „szabály" szerint egy emelettel feljebb száll, mivel a szélső épület fordulási hely. A többi lehetőség már egyszerűbb. A feladat több „épületre" és több dimenzióra is általánosítható – átvezet a gráfok és a fraktálok birodalmába.

HÍREK VERSENYEKRŐL

1996. április 3-án rendezték meg országszerte a Kalmár László verseny megyei fordulóját. A kitűzött feladatok a következők voltak:

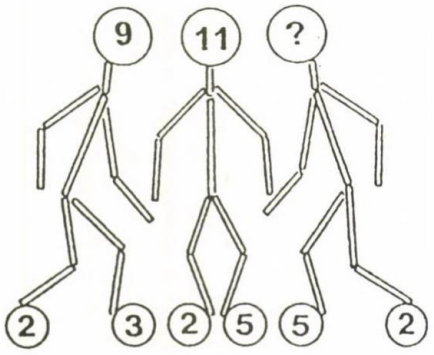
3. osztály

1. A számpiramis minden téglalapjában az alatta levő két szám összege szerepel. Mennyi a csúcson lévő szám?

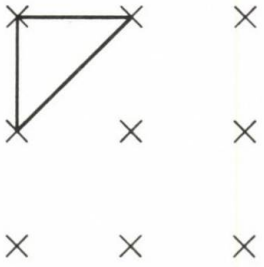


A legfelső számból vond ki az alsó sor összegét! Mennyi a különbség?

2. A három cimbora azonosan gondolkodik, ugyanúgy számol. Melyik szám van a harmadik fejben?



3. Kilenc rácspontból hármat kiválasztottam és összekötöttem. Rajzold le az összes ilyen alakú, ilyen méretű, de különböző helyzetű kis háromszöget! (Két háromszög különböző helyzetű, ha legalaább egy csúcsukban különböznek.)



4. Bence a téli szünetben nagymamájának régi gombjaiból játékosokat gyűjtött gombfocicsapatához. Csatároknak a kétlyukú gombokat válogatta. A négylyukúak egyike lesz a kapus, a többi pedig védő lesz. A 16 szép gombon 44 lyuk van. Hány csatárjelölt van Bence gombfoci-csapatában?

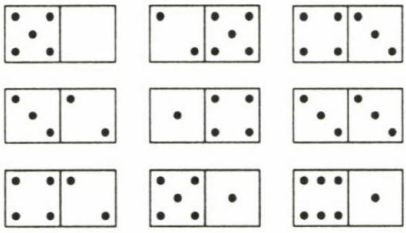
5. – Van telefonunk! – újságolta Kati. – A mi hívószámunk olyan hatjegyű szám, amelynek számjegyei éppen növekvő sorrendben követik egymást, és a számjegyek összege 39. Szia! Hívj fel! Te milyen számot tárcsáznál?

6. „Egy ember megkívánta a réten legelő lovakat és így szólt azokhoz: – Ha még egyszer ennyien meg annak felének a fele volnátok, azzal dicsekedhetném, hogy 100 lovam van? Hány ló volt a réten?" (E feladat *Gerbert* tudós szerzetestől származik, akit *II. Szilveszter pápaként* ismerünk. Ő küdte *Szent István* királyunknak a koronát.)

4. osztály

1. Három gyerek – Dani, Zsuzsi és Peti – összesen 30 mogyorót találtak a kertben a bokor alatt. Daninak és Petinek együtt 17, Zsuzsinak és Petinek pedig együtt 19 mogyorója van. Mondd meg, hogy mennyi mogyorót találtak külön-külön a gyerekek?

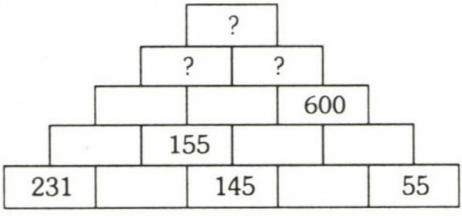
2. Cserélj fel két-két dominót úgy, hogy a pontok száma a három sorban és a három oszlopban egyaránt 18 legyen!



3. A 4.A osztályban hattal több a leány, mint a fiú. Amikor három fiú hiányzott, akkor kétszer annyi leány volt az osztályban, mint fiú. Zsóka a 4.A-ba jár, hány leány osztálytársa van?

4. A kilenc rácspontból hármat összekötve sokféle háromszöget kaphatunk. Rajzold le az összes különböző háromszöget!
(Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha kivágva és egymásra helyezve nem fedik pontosan egymást.)

5. A számpiramis minden téglalapjában az alatta lévő két szám összege áll. Milyen számok kerüljenek a kérdőjelek helyére?



6. (Azonos a 3. osztály 6. feladatával.)

5. osztály

1. Hányféleképpen lehet felváltani egy 100 forintost 5, 10 és 20 forintosokra?

2. A háromjegyű számok közül melyikből van több, amelyiknek minden számjegye páros, vagy amelyiknek minden számjegye páratlan? Miért?

3. 27 darab 1 cm élű kis kockából egy nagy kockát építünk. Ezután minden lap közepéről kiveszünk egy kis kockát és a nagy kocka közepéről is kivesszük az ott levő kis kockát. Mekkora lesz a megmaradó test felszíne és térfogata?

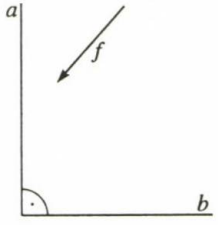
4. Amikor Péter 9 éves volt, édesapja éppen 33 éves lett. Most édesapja kétszer annyi idős, mint Péter. Hány éves most Péter?

6. osztály

1. Három különböző színű (egy piros, egy kék és egy zöld) dobókockával dobunk. Hány különböző esetben fordulhat elő, hogy a dobott számok összege 10? (Különböző eseteknek tekintjük, ha a pirossal dobunk 3-at, a kékkel 2-t, a zölddel 5-öt, illetve ha a pirossal dobunk 2-t, a kékkel 3-at, a zölddel 5-öt.)

2. Hány olyan szám van az első kétezer pozitív egész szám között, amelyre teljesül, hogy a számjegyeinek összege páratlan és a nála eggyel nagyobb szám számjegyenek összege is páratlan?

3. Adott két egymásra merőleges síktükör, *a* és *b*. Az *f*-fel jelölt irányból jövő fénysugár *a*-ról, majd *b*-ről visszaverődve folytatja útját. Mit mondhatunk a visszavert fénysugár irányáról?
Állításodat indokold!



4. A sík egy pontján 15 egyenes halad. Megmérjük a szomszédos egyenesek szögeit és kiválasztjuk azt a szöget, amelynek mértéke a legkisebb (ha több ilyen van, akkor ezek közül bármelyiket választhatjuk). Legfeljebb hány fokos lehet ez a szög?

7. osztály

1. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben van ismétlődő számjegy (pl. 2213, 4142, 1100)?

2. Egy 4 tonna teherbírású teherautót kell megrakni olyan konténerekkel, amelyek egyenként 170 kg, illetve 190 kg súlyúak. Ki lehet-e használni a teherautó teljes terhelését?

3. Egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságvonal és súlyvonal az átfogóval szemközti szöget három egyenlő részre osztja. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

4. Az $ABCD$ konvex négyszög melyik belső pontjára igaz, hogy a négy csúcstól mért távolságának az összege a legkisebb? Állításodat indokold!

5. Hány olyan különböző háromszög van, amelyben mindegyik oldal hossza a következő értékek közül kerül ki: 4, 5, 6, 7 cm?

8. osztály

1. Állítsuk elő 1996-ot egynél több, egymást követő pozitív egész szám összegeként!

2. Az ABC egyenlőszárú háromszögben $ABC\sphericalangle = CAB\sphericalangle = 80°$. Az AC száron egy P, a BC száron egy Q pontot vettünk fel úgy, hogy $PBQ\sphericalangle = 30°$ és $QAP\sphericalangle = 40°$. Mekkorák a QPB és PQA szögek?

3. Egy kerékpáros A-ból B-be ment, majd visszakerekezett. A-tól B-ig 2,5 óráig tartott az útja, visszafelé 3,5 óráig. Emelkedőn 12 km/óra, lejtőn 18 km/óra, vízszintes úton 16 km/óra sebességgel haladt. Számítsuk ki az A és B közötti távolságot, ha tudjuk még, hogy odafelé (és így visszafelé is) fél óráig ment vízszintes úton!

4. Igazoljuk, hogy ha az $\overline{abcabc}$ hatjegyű szám osztható 37-tel, akkor a $\overline{bcabca}$ hatjegyű szám is osztható 37-tel (a, b, c számjegyek)!

5. Hány olyan különböző háromszög van, amelynek kerülete 30 cm és minden oldala egész centiméter hosszúságú?

Csordás Mihály – Koleszár Edit – Nagy Tibor

A Zrínyi Ilona Országos Matematikaverseny

Ebben a tanévben hetedik alkalommal rendeztük meg a Zrínyi Ilona Matematikaversenyt, amely lényegesen eltér a hagyományos versenyektől. Alapvetően új benne, hogy nagyon rövid idő alatt (egy feladatra átlagosan csak 3 perc jut) kell kiválasztani az öt válasz közül az egyetlen helyeset. Ez egyszerűnek tűnik, de ha valaki versenyszerűen megold egy feladatsort, azonnal rájön, hogy találgatással, tippeléssel nem sok eredményt érhet el. Ez a tesztes versenyforma az elmúlt években egyre népszerűbb lett. Ezt bizonyítja az elindult versenyzők növekvő létszáma:

1990. (városi)	470 versenyző	27 iskola
1991. (megyei)	1370 versenyző	86 iskola
1992. (országos)	13600 versenyző	760 iskola
1993. (országos)	31338 versenyző	1372 iskola
1994. (országos)	38661 versenyző	1595 iskola
1995. (országos)	54424 versenyző	2228 iskola
1996. (országos)	57186 versenyző	2324 iskola

Az idei 3 napos, Kecskeméten megrendezett országos döntőn 479 tanuló vehetett részt, közülük 80 határainkon túli magyar iskolák tanulója. A rendezvényt a Katona József Színházban a város alpolgármestere nyitotta meg, majd zenés műsort láthattak a gyerekek. Második nap délelőtt zajlott a verseny, majd utána a feladatok közös megoldása. Az ország-

gos döntőt gazdag szabadidős programok egészítették ki. A verseny napján délután nagy élményt jelentett a gyerekeknek a Kiskunsági Nemzeti Park területeivel való ismerkedés, a Leskowszky hangszergyűjtemény megtekintése, a planetáriumi előadások és a kecskeméti Fodor cukrászdákban elfogyasztott ingyenes fagylalt. Este zenés előadás, táncház, kézműves foglalkozások, számítógépes és logikai játékok szórakoztatták a részvevőket, akik jó hangulatban fogyasztották el a HC-FAIR Informatikai Kft. által biztosított ingyenes ödítő italokat és csokoládét. Az utolsó napon lezajlott ünnepélyes eredményhirdetés és díjkiosztás után mindenki élményekkel gazdagodva utazhatott haza.

Ízelítőül néhány feladat az idei országos döntőről:

1. Micimackó egy erdei sétája alkalmával elveszítette pénztárcáját, amiben összesen 2000 fabatka volt. Amikor észrevette, így kesergett: „Most elveszett a kedvenc pénztárcám, amiben a saját pénzemen kívül benne volt Malacka 1000 és Nyuszi 500 fabatkája is. Most még ezeket is ki kell fizetnem a megtakarított pénzemből." Hány fabatka Micimackó összes vesztesége, ha barátainak odaadja a nekik járó pénzt, s üres pénztárcáját másnap megtalálja?

(A) *1500* **(B)** *200* **(C)** *2500*
(D) *3000* **(E)** *3500*

2. Egy fából készült téglatest élei 3 cm, 4 cm és 5 cm. A téglatest testátlóinak metszéspontjában él egy elhanyagolható méretű fába szorult féreg. Hány centiméteres járatot kell fúrnia a téglatestben, ha a legrövidebb úton szeretne kijutni a fából?

(A) *1,5* **(B)** *2* **(C)** *2,5*
(D) *3* **(E)** *4*

3. Kati gondolt egy pozitív egész számra. Ha ez a szám páros, akkor egy ○-t, ha páratlan, akkor egy □-et rajzolt a papírlapra. Ezután a gondolt számot elosztotta kettővel. Ha a hányados páros, akkor ○-t, ha páratlan, akkor □-et rajzolt a papírlapra. Ezután a hányadost ismét osztotta kettővel, és folytatta a kettővel való osztást mindaddig, míg hányadosként 1-et kapott. Minden osztás hányadosát a fent leírt módon jelölte balról jobbra haladva. Ha az osztás eredménye nem egész szám, akkor az eredmény törtrészét nem vette figyelembe. Melyik számra gondolt Kati, ha a □○□□□○○□□□□□□ jelsorozat került a papírlapra?

(A) *1993* **(B)** *1995* **(C)** *1996*
(D) *1997* **(E)** *1999*

4. Az egyszemű manók országában a manók zöld, vagy kék szeműek. A zöld szeműek mindig igazat mondanak, a kék szeműek mindig hazudnak. Amikor Sólyomszem itt járt, fogságba esett. A manók zöld szemű királya a szabadulást feltételhez kötötte. Sólyomszemnek bekötött szemmel kellett belépni egy szobába, ahol 5 manó tartózkodott és a következőket mondta:

- 3 zöld, 1 kék szemet látok.
- 4 kék szemet látok.
- 1 zöld, 3 kék szemet látok.
- 4 zöld szemet látok.

Az ötödik manó nem szólalt meg.

Sólyomszemnek ebből kellett kitalálnia, hogy hány kék szemű manó tartózkodott a szobában. Mit válaszolt Sólyomszem, ha kiszabadult a fogságból?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3*
(D) *4* **(E)** *5*

5. Az $a_1a_2a_3...a_{10}$ olyan tízjegyű szám a tízes számrendszerben, amelyben mind a tíz számjegy szerepel. Az a_1 osztható 1-gyel, az a_1a_2 szám osztható 2-vel, az $a_1a_2a_3$ szám osztható 3-mal, és így tovább, végül az $a_1a_2a_3...a_{10}$ szám osztható 10-zel. Mennyi az a_1 számjegy?

(A) *1* **(B)** *3* **(C)** *5*
(D) *7* **(E)** *9*

Zrínyi Ilona Országos Matematikaverseny legjobbjai:

3. osztály:

1. Telekesi Gábor, Terézvárosi Ált. Isk., Budapest, 90 pont, tanítója: Nagyné Bedők Ágota

2. Szabó István, Olcsai-Kiss Z. Ált. Isk., Körmend, 90 pont, tanítója: Györke Lászlóné
3. Steller Gábor, Hunyadi Mátyás Ált. Isk., Budapest, 85 pont, tanítója: Obetkó Katalin

4. osztály:

1. Gruber László, KLTE Arany János Gyak. Ált. Isk., Debrecen, 100 pont, tanítója: Pappné Katona Ilona
2. Nedeczky Gábor, Kisfaludy Úti Ált. Isk., Kaposvár, 95 pont, tanítója: Embersics Sándorné
3. Horváth Márton, Centenáriumi Ált. Isk., Budapest, 95 pont, tanítója: Németh Katalin

5. osztály:

1. Nagy Tibor, Petőfi Sándor Ált. Isk., Hortobágy, 115 pont, tanára: Nagy József
2. Gáthy Lajos, Zalka Máté Gimn., Fehérgyarmat, 115 pont, tanára: Petermann Istvánné
3. Backhausz Ágnes, Fazekas Mihály Gyakorló Ált. Isk., Budapest 115 pont, tanára: Kovács Csongorné

6. osztály

1. Péterfalvi Ferenc, Árpád Fejedelem Gimn. és Ált. Isk., Pécs, 125 pont, tanára: Dr. Győrpál Elemérné
2. Karlik Zsuzsanna, Bleyer jakab Német Nemzetiségi Ált. Isk., Budaörs, 117 pont, tanára: Fiala Ildikó
3. Horváth Illés, matematika Tagozatos Ált. Isk., Budapest, 116 pont, tanára: Kiss Tiborné

7. osztály

1. Dávid Róbert, Batthyány Lajos Gimn., Nagykanizsa, 135 pont, tanára: Erdős Gábor, Györek László
2. Fekete Árpád II., Petőfi Sándor Ált. Isk., Kiskunfélegyháza, 132 pont, tanára: Árvai János
3. Pesti Gábor, Batthyány Lajos Gimn., Nagykanizsa, 131 pont, tanára: Erdős Gábor

8. osztály

1. Keszegh Balázs, Selye János Gimn., Komarno, 137 pont, tanára: Keszegh István
2. Győri Nikolett, Fazekas Mihály Gyakorló Ált. Isk., Budapest, 130 pont, tanára: Fazakas Tünde
3. Dezső Balázs, Teleki Blanka Gimn. és Ált. Isk., Székesfehérvár, 130 pont, tanára: Ponáczné Csuthy Márta, Sipos Imre

A Zrínyi Ilona matematika verseny eddigi feladatai, megoldásai könyv formájában is megjelentek:

Matematika versenytesztek '91-93

Matematika versenytesztek '94

Matematika versenytesztek '95

A könyvek megvásárolhatók kötetenként 498 Ft-ért a Mozaik könyvesboltokban és az ország több mint 300 könyvesboltjában.

MOZAIK könyvesboltok:
Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: 62/485-522
Budapest, Üllői út 70. Tel.: 11-42-612

A Bolyai János Matematikai Társulat oktatási szakosztálya

1996. július 2. és 5. között

rendezi meg a RÁTZ LÁSZLÓ vándorgyűlést Sopronban. A vándorgyűlésre 4 szekcióban kerül sor:

1. Általános iskola alsó tagozat
2. Általános iskola felső tagozat
3. Középiskola
4. Felsőoktatás

MAT-KAPOCS konferenciájának a vándorgyűléshez csatlakozására júl. 5-6-án kerül sor.

A vándorgyűlésre az utólagos jelentkezés a Bolyai János Matematikai Társulatnál (1027 Bp. Fő u. 68., tel.: 201-7656, 201-6974) lehet.

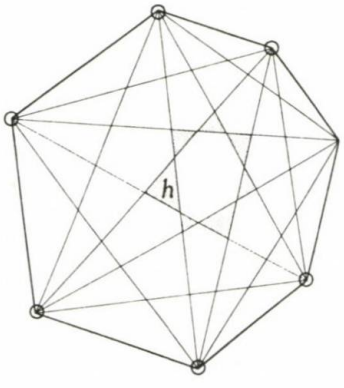
Az 1995/96. tanévi matematika feladatmegoldó pontverseny III. fordulójában kitűzött feladatok megoldása

A feladatok szövege az 1996/1. szám 24. oldalán olvasható.

96.1. Tudjuk, hogy a bástya a vele azonos oszlopban álló figurát tudja kiütni. Ezért a sakktábla mind a 8 sorába egy bástyát helyezhetünk el. Az első sorban 8 helyre tehetjük a bástyát, a másodikban már csak 7 helyre, mert az első sorba letett bástya oszlopába nem tehetjük. Így az első két sorban összesen $8 \cdot 7$ lehetőség van a két bástya elhelyezésére. A harmadik sorban már csak 6 helyre tehetünk bástyát, így az első három sorban $8 \cdot 7 \cdot 6$ lehetőség van a 3 bástya elhelyezésére úgy, hogy egyik se üsse a másikat.

A gondolatmenetet így folytathatjuk tovább és azt kapjuk, hogy a 8 bástya elhelyezésére $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ lehetőség van.

96.2. A feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy egy megfelelő rajzot készítünk és azon megszámoljuk a szóban forgó háromszögek számát.

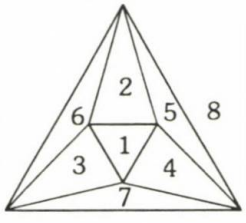


7 háromszöget találunk, amelynek egyik csúcsa sem esik egybe a hétszög valamelyik csúcsával.

Ha megfigyeljük a h-val jelölt háromszög oldalait, ezek olyan átlók, amelyek a hétszög csúcsai közül 6-ot „fognak" le, ezt a 6 pontot kötik össze páronként. Mivel a 7 pont közül 6-ot hétféleképpen tudunk kiválasztani (úgy, hogy valamelyik pontot kihagyjuk), hét háromszög keletkezik.

96.3. Először is azt érdemes megfigyelni, hogy egy könyv összefüggő része, amely kiesett a vastag könyvből, csak páratlan oldalon kezdődhetett és páros oldalon végződhetett. Így a kiesett rész utolsó oldalán az oldalszám 356, vagy 536 lehet. A kiesett rész első oldalán a legkisebb szóba jöhető oldalszám 365. Mivel ez nagyobb, mint 356, így a kiesett rész utolsó oldalán csak 536 állhat. Ha most végignézzük az első oldalra szóba jöhető páratlan számokat: 365, 563, 635, 653, akkor világos, hogy az első oldalon csak 365 állhat, tehát a kiesett rész $536 - 364 = 172$ oldalas.

96.4. Számozzuk meg a „térkép" országait és gondoljuk át, hogyan lehet „jól" kiszínezni az országokat.



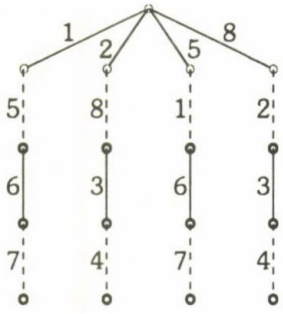
Az 1, 5, 6, 7 jelű ország lehet azonos színű (például piros) és a 2, 3, 4, 8 jelű a másik színű (például kék) egy jó színezésnél.

A másodiknak lépő (a kék) játékosnak van nyerő stratégiája, ennek lényege az, hogy megakadályozza, hogy piros lépni tudjon.

A 2, 3, 4 tartományok szerepe teljesen azonos, így elég az egyik esetet vizsgálni, ugyanígy elég az 5, 6, 7 tartományok közül az egyik színezése esetén vizsgálni a stratégiát.

A következő ábrán a folytonos vonalak jelölik *A* lépéseit (a piros, kezdő játékosét), a szaggatott vonalak a *B* (a kék) lépéseit. A stratégiában feltételezzük, hogyha például *A* kezdő lépése 2 (azaz a 2-es jelű országot színezi pirosra), akkor *B* lépése után nem fogja a 8-ast pirosra színezni, hiszen ezzel már saját maga tenné lehetetlenné a saját további lépéseit.

Ezek alapján *B* nyerő stratégiája így szemléltethető.



96.5. Azt kell igazolnunk, hogy a szorzat páros, ehhez elég megmutatni, hogy a szorzatnak mindig van legalább egy páros tényezője.

Az adott öt egész szám között mindig van legalább három, amely 2-vel osztva azonos maradékot ad (vagy páros, vagy páratlan). Ha például van 3 páratlan szám, akkor bármilyen más sorrendbe is írjuk ezeket, lesz két azonos helyen (például a 3. helyen) álló páratlan szám. Ekkor ezek különbsége páros, tehát a szorzatnak lesz páros tényezője.

96.6. Ez a feladat könnyen megoldható például úgy, hogy $n-1$ darab párhuzamos egyenest húzunk, ezek a síkot pontosan n részre darabolják fel.

96.7. Az első néhány számot könnyen megtaláljuk. Az 1, 2 is jó, hiszen egyikhez sincs olyan szám, amely 1-nél nagyobb és relatív prím hozzá, így igaz az, hogy ami relatív prím hozzájuk és 1-nél nagyobb, az prímszám. Azért igaz, mert nincs ilyen szám. A 3 is jó, a 4 is. A 4-nél nagyobb számok között már páratlan szám nem jöhet szóba, csak páros, hiszen a páratlanok a 4-hez relatív prímek és a 4 nem prím. A 6 és a 8 jó. Ezután észrevehetjük, hogy a 9-nél nagyobbak között már csak a 2-vel és 3-mal, tehát a 6-tal oszthatókat érdemes nézni, mert ha egy páros szám nem osztható 3-mal, akkor 9-hez relatív prím és a 9 nem prím. A 12, 18 és 24 jók lesznek. A 25-nél nagyobb számok között már csak a 2-vel, 3-mal és 5-tel is, tehát 30-cal oszthatókat kell nézni. A 30 jó. Mivel a 49-nél nagyobbak között már csak a 2-vel, 3-mal, 5-tel és 7-tel oszthatókat kell nézni és $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, ezért 100-ig a 30 után már nincs jó szám.

Így tehát a következő 10 számot találtuk: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

96.8. Jelölje a *BD* él felezőpontját *E*, a *CD* él felezőpontját *F*, az *ABC* lap középpontját *H*. Mivel a tetraéder szabályos, *DH* merőleges az *ABC* lap síkjára, tehát az *AH* egyenesre is, így *AHD* derékszögű háromszög, átfogója *AD* és *H* rajta van az *AD* átmérőjű k_1 körön.

Az *ABD* lap szabályos háromszög, ezért *AE* merőleges *BD*-re, tehát *E* rajta van az *AD* átmérőjű k_2 körön. Hasonlóan adódik, hogy *F* rajta van egy *AD* átmérőjű k_3 körön.

A k_1, k_2, k_3 körök közös átmérője *AD*, így ezek a körök egy *AD* átmérőjű gömbön vannak (ezen tehát rajta van *A*, *H*, *E*, *F* és még *D* is), a gömb sugara az *AD* él fele: 1 egység.

Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6721 Szeged, Pusztaszeri u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és a külső felére írják rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 1996. július 31.**

73. Egy sorba leírtunk 1000 természetes számot. Mindegyik természetes szám alá írjuk le, hogy hányszor fordult elő a sorban. Az így kapott sor alá ugyanilyen módon készítsünk újabb sort úgy, hogy csak az előző sort vegyük figyelembe. Igaz-e, hogy ezt az eljárást ismételve egy idő után csupa egyforma sort fogunk kapni ?

Szőkefalvi-Nagy Gyula
Mat. Emlékverseny 1995-96.

74. Húzzuk meg egy O középpontú kör két sugarát, ezeknek a körrel alkotott metszéspontjai legyenek A és B. Az AB húr mint átmérő fölé szerkesszünk félkörívet az O-val átellenes oldalra, és ezt harmadoljuk meg. Jelölje a harmadolópontokat C és D. Igaz-e, hogy az OC és OD szakaszok harmadolják az AOB szöget ?

Tóth Sándor, Sárospatak

75. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalhosszai, akkor

$$(a+b+c)^5 \geq 81abc\left(a^2+b^2+c^2\right)!$$

András Szilárd, Csíkszereda

76. Legyen

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ és } a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$$ minden pozitív egész n esetén. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) < \sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)!$$

Csete Lajos, Markotabödöge

77. Az $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény minden pozitív egész számhoz annak legnagyobb páratlan osztóját rendeli hozzá. Jelölje $\varphi(n)$ az $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$ értékek közül a $4k+1$ alakú számok számának és a $4k+3$ alakú számok számának ebben a sorrendben vett különbségét.
Igazoljuk, hogy

a) φ csak pozitív egész értékeket vesz fel;

b) φ értékkészlete $\mathbb{Z}^+$-on megegyezik $\mathbb{Z}^+$-al!

(A **61.** feladat élesítése.)

Dályay Pál Péter, Szeged

78. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, és c olyan pozitív egészek, hogy a legnagyobb közös osztójuk 1, és $\varphi(n)$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma (Euler-féle függvény), akkor

$$\varphi(a\cdot b\cdot c) \leq \sqrt{\varphi\left(a^2\right)\cdot\varphi\left(b^2\right)\cdot\varphi\left(c^2\right)}!$$

Bege Antal, Kolozsvár

Feladatmegoldások (55-56. feladatok)

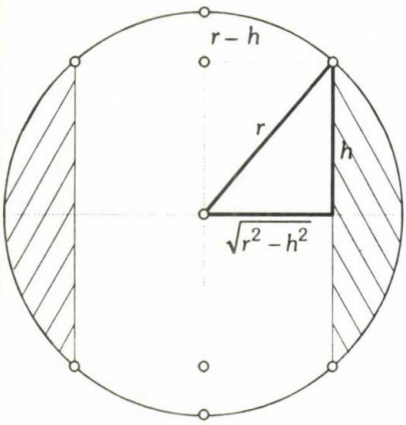
55. Egy, a női egyenjogúságért küzdő feminista mozgalom képviselői a következőt javasolták: A jegygyűrűk a jövőben készüljenek úgy, hogy egy tömör aranygömböt középen átfúrnak, mégpedig oly módon, hogy a hengerszerű furat tengelye illeszkedjen a gömb középpontjára. Így a gömb sugarát és a furat átmérőjét változtatva elérhető, hogy mindenki

találjon az ujjára való és a pénztárcájának megfelelő gyűrűt.

Igaz-e, hogy ha a figyelmes vőlegény menyasszonyának és magának azonos szélességű gyűrűt választ, akkor azok értékben (térfogatban) is megegyeznek ?

Blázsik Zoltán, Szeged

I. megoldás: A furat hengerének magassága legyen $2h$, a gömb sugara pedig r. A henger sugara így $\sqrt{r^2-h^2}$. (*1. ábra*)



1. ábra

A maradéktest térfogata úgy számítható ki, hogy a gömb térfogatából kivonjuk a furat hengerének és két gömbszeletének térfogatát.

A gömb térfogata: $V_1 = \frac{4}{3}r^3\pi$.

A henger térfogata: $V_2 = 2h\cdot\left(r^2-h^2\right)\cdot\pi$.

Egy r-h magasságú gömbszelet térfogata:

$$V_3 = \frac{1}{3}\cdot(r-h)^2\cdot\left(3r-(r-h)\right)\cdot\pi =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(r-h)^2\cdot(2r+h)\cdot\pi.$$

A maradéktest térfogata:

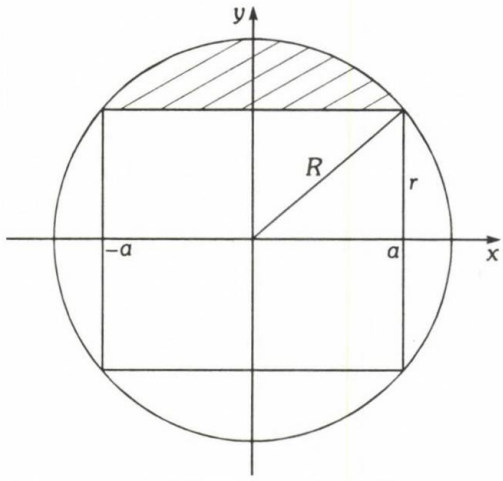
$$V = V_1 - V_2 - 2V_3 = \frac{4}{3}r^3\pi - 2h\left(r^2-h^2\right)\pi -$$

$$-\frac{2}{3}(r-h)^2\cdot(2r+h)\cdot\pi = \frac{4}{3}h^3\pi.$$

Ez azt jelenti, hogy a gyűrű térfogata nem függ a gömb sugarától, csupán a furat hosszától, azaz a gyűrű szélességétől.

Horváth Géza, Zselíz

II. megoldás: Tekintsük az $x^2+y^2=r^2$ egyenletű kört, és abban a $2r$ és $2a$ hosszúságú oldalakkal rendelkező téglalapot (*2. ábra*).



2. ábra

Ha ezt az alakzatot az x tengely körül megforgatjuk, akkor a bevonalkázott rész előállítja a „jegygyűrűt". Ennek térfogata:

$$V = \pi\cdot\int_{-a}^{a}\left(R^2-x^2\right)dx - 2ar^2\pi =$$

$$= \pi\cdot\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} - 2ar^2\pi = \frac{4}{3}a^3\pi.$$

Látható, hogy a gyűrű térfogata csak annak vastagságától függ.

Csorba Ferenc, Győr
Dályay Pál Péter, Szeged
Nagy Erzsébet, Debrecen

Megjegyzés: A feladat lényegében azonos az Összefoglalaó feladatgyűjtemény matematikából – Tankönyvkiadó, Budapest – 2427. feladatával, és megtalálható még Reiman István: A geometria és határterületei – Gondolat Kiadó, Budapest, 1986. – című könyvének 252-253. oldalán is.

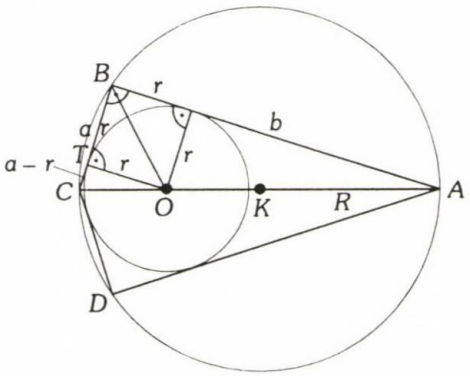
Csorba Ferenc, Győr
Tóth Sándor, Sárospatak

A megoldók száma: 10.

56. Mekkora a legkisebb szöge annak a deltoidnak, amely húrnégyszög, továbbá a beírt és a köré írt kör területének aránya 1 : 6?

Fitos László, Esztergom

I. megoldás: Legyen a deltoid két szomszédos oldala a és b, a beírható kör sugara pedig r (*3. ábra*). Ha a beírható kör középpontja O, akkor a CTO és CBA háromszögek hasonlóságából adódóan $\frac{a-r}{r}=\frac{a}{b}$, amiből $r=\frac{ab}{a+b}$.



3. ábra

A feladat feltétele és Pithagorasz tétele alapján $a^2+b^2=4R^2=24r^2$, amibe r kifejezését beírva és rendezve azt kapjuk, hogy

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot(a+b)^2=24a^2b^2.$$

Mivel a deltoid csak hasonlóság erejéig meghatározott, ezért legyen pl. $b=1$. Alakítsuk a fenti egyenlet bal oldalát b helyére 1-et írva.

$$\left(a^2+1\right)\cdot(a+1)^2=a^4+2a^3+2a^2+2a+1=$$

$$=\left(a^2+a+1\right)^2-a^2$$

Az egyenlet 0-ra redukálása és a bal oldal szorzattá alakítása után

$$\left(a^2+6a+1\right)\cdot\left(a^2-4a+1\right)=0.$$

Mivel $a>0$, ezért $a^2-4a+1=0$, ahonnan $a_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$. Az a-ra kapott két érték egymás reciproka, ami megfelel annak a választási lehetőségünknek, hogy $a>b$ vagy $a<b$. A *3. ábra* alapján $tg\alpha=2-\sqrt{3}$, amiből $\alpha=15^\circ$, és így a deltoid legkisebb szöge $BAD\sphericalangle=2\alpha=30^\circ$.

Nagy Erzsébet, Debrecen

II. megoldás: A *3. ábra* jelöléseit használva $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\cos\alpha$ és $BD=2R\sin2\alpha$. A deltoid területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy

$$4R^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2Rr(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

A két kör területére vonatkozó feltételből $R=r\cdot\sqrt{6}$, amit beírva a fenti egyenletbe, majd azon a megfelelő átalakításokat elvégezve

$$6\sin^2 2\alpha-\sin2\alpha-1=0$$

adódik. Ebből $\sin2\alpha=\frac{1}{2}$ vagy $\sin2\alpha=-\frac{1}{3}$ adódik. Figyelembe véve, hogy 2α a deltoid legkisebb szöge, $2\alpha=30^\circ$.

László Sándor, Szombathely

Megjegyzés: Ha egy négyszög húrnégyszög és érintőnégyszög is egyben, r a beírható, R a köré írható kör sugara, és középpontjaik távolsága d, akkor

$$2r^2\left(R^2+d^2\right)=\left(R^2-d^2\right)^2.$$

Ezt az összefüggést *Nikolaus Fuss (1755-1826)*, Euler egyik tanítványa találta. (Lásd pl. Heinrich Dörrie: A diadalmas matematika – Gondolat Kiadó, Budapest, 1965., 208-219. oldal.)

Csete Lajos, Markotabödöge
Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 13.

(Terjedelmi okok miatt az 57-60. feladatok megoldásait és a megoldók névsorát a következő számban jelentetjük meg.)

TALLÉR JÓZSEF

A LOGIKA ALAPJAI

1996 júniusában a Mozaik kiadásában megjelenik A logika alapjai című könyv. A segédkönyvet az 1995/96-os középiskolás tankönyvjegyzékről már megrendelhették. A kötet két nagy részre tagolódik. Az első a klasszikus, arisztotelészi logikával, a másik pedig a modern, formális logikával foglalkozik.

Mivel a könyv legfontosabb célja nem elméleti ismeretanyag átadása, hanem gondolkodási képességek fejlesztése, a könyv alapvetően feladatcentrikus. Az új ismeretek bevezetése is gyakorlatok megoldásán keresztül történik, így az olvasók maguk ismerhetik fel, fogalmazhatják meg és általánosíthatják a szabályszerűségeket. Az ismeretek elmélyítését is számos feladat segíti. A logikailag helyes gondolkodás tudatosítása érdekében a példák értelmes mondatok, szövegrészletek.

Logikai elemzésükkel megállapítható a bennük foglalt megállapítások, következtetések helytálló, illetve hamis volta. A könyv állandó motívuma Sherlock Holmes figurája.

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 312-988, 312-578
MOZAIK Könyvesboltok:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 11-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522